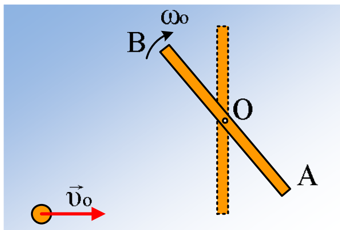
Πώς εφαρμόζεται η αρχή διατήρησης Στροφορμής (ΑΔΣ)

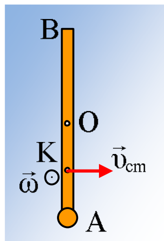


Σε λείο οριζόντιο επίπεδο περιστρέφεται μια ομογενής ράβδος μάζας M=3kg και μήκους l=2m με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0=1rad/s, όπως στο σχήμα (κάτοψη). Μια σφαίρα μάζας m=M=3kg κινείται στο ίδιο επίπεδο με ταχύτητα υ_0 =4m/s και συγκρούεται πλαστικά στο άκρο Α της ράβδου, τη στιγμή που η σφαίρα έχει ταχύτητα κάθετη στη ράβδο.

Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του στερεού s που προκύπτει, καθώς και η ταχύτητα της σφαίρας, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Ο, I_o= (1/12)Ml^2.

Απάντηση:



Η ράβδος πριν την κρούση στρέφεται γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Ο. Μετά την κρούση το στερεό s θα περιστρέφεται γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα, ο οποίος θα περνά από το κέντρο μάζας του Κ, το οποίο, αφού οι μάζες σφαίρας και ράβδου είναι ίσες, θα βρίσκεται στο μέσον της ΟΑ.

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση, παίρνουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\cdot\upsilon_0=(M+m)\cdot\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_{cm}=\frac{1}{2}\,\upsilon_0=2m/s \qquad (1)$$

Ερχόμαστε τώρα στην ΑΔΣ. Η στροφορμή **ορίζεται** ως προς ένα ορισμένο σημείο ή κατά (ως προς) έναν ορισμένο άξονα. Άρα πρέπει να επιλέξουμε κάποιον άξονα. Δεν θα πάρουμε τη στροφορμή τη μια φορά ως προς Ο και την άλλη ως προς το Κ! Ή το ένα ή το άλλο…

- Έστω ότι επιλέγουμε να δουλέψουμε ως προς κατακόρυφο άξονα y_1, ο οποίος περνά από το μέσον Ο της ράβδου. Θα έχουμε (θεωρούμε ως θετική την αντιωρολογιακή φορά):

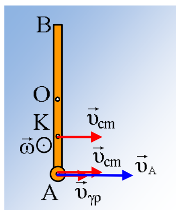
$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi,O} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda,O} \rightarrow m\cdot\upsilon_0\cdot\frac{\ell}{2} - I_o\cdot\omega_0 = I_K\cdot\omega + M_{o\lambda}\cdot\upsilon_{cm}\cdot\frac{\ell}{4} \quad (2)$$

Όπου $I_o=\frac{1}{12}M\,\ell^2 = \frac{1}{12}3\cdot 2^2 kg\cdot m^2 = 1\ kg\cdot m^2$.

$$I_K=\frac{1}{12}M\,\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}3\cdot 2^2 kg\cdot m^2 + 2\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 kg\cdot m^2 = 2{,}5\ kg\cdot m^2.$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$3\cdot4\cdot1 - 1\cdot1 = 2{,}5\cdot\omega + 6\cdot2\cdot\frac{2}{4} \rightarrow \omega=2rad/s.$$

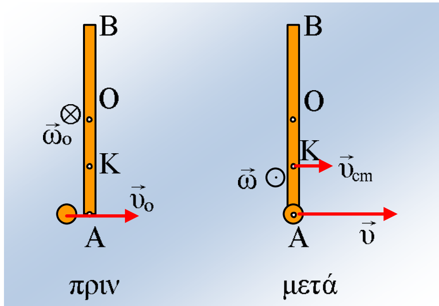


Με βάση την παραπάνω τιμή, βλέπουμε ότι το στερεό s, μετά την κρούση στρέφεται πράγματι αντιωρολογιακά. Εξάλλου η σφαίρα αμέσως μετά την κρούση έχει τις ταχύτητες που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, όπου λόγω περιστροφής, έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R=2\cdot 0,5m/s=1m/s.$$

$$\text{Έτσι:}\quad \upsilon_A=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=2m/s+1m/s=3\ m/s.$$

- Ας επιλέξουμε τώρα να εφαρμόσουμε την ΑΔΣ ως προς κατακόρυφο άξονα y_2, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Κ του στερεού s. Θα έχουμε (θεωρούμε ξανά ως θετική την αντιωρολογιακή φορά):



$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi,K}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda,K}\rightarrow m\cdot\upsilon_0\cdot\frac{\ell}{4}-I_o\cdot\omega_0=I_K\cdot\omega$$

Και με αντικατάσταση έχουμε:

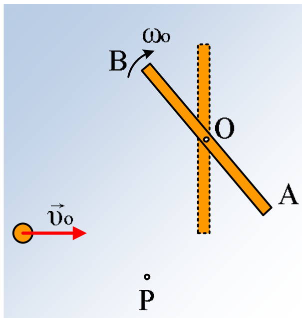
$$3\cdot 4\cdot\frac{2}{4}-1\cdot 1=2,5\cdot\omega\rightarrow\omega=2rad/s$$

Ενώ για την ταχύτητα της σφαίρας ξανά θα έχουμε:

$$\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot(AK)=2\cdot 0,5m/s=1m/s.\rightarrow$$

$$\upsilon_A=\upsilon=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=2m/s+1m/s=3\ m/s.$$

Συμπέρασμα:



Κατά τη διάρκεια της κρούσης, έχουμε **αλλαγή του άξονα περιστροφής** του στερεού. Το στερεό μας αρχικά ήταν η ράβδος η οποία στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το μέσον της Ο. Μετά την κρούση το στερεό μας είναι το σύστημα ράβδος και σφαίρα, το οποίο στρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το νέο κέντρο μάζας Κ. Αν θέλουμε να εφαρμόσουμε ΑΔΣ, μπορούμε να το κάνουμε ως προς οποιοδήποτε σημείο, αλλά **το ίδιο σημείο** πριν και μετά την κρούση. Παραπάνω πήραμε τα σημεία Ο και Κ. Θα μπορούσαμε να πάρουμε και οποιοδήποτε άλλο σημείο P, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com