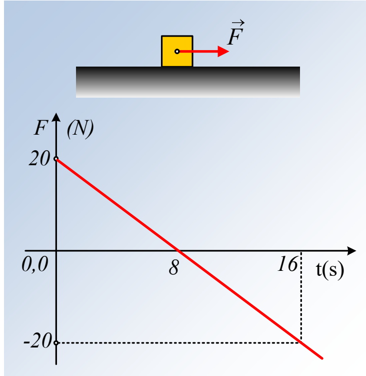
Μια μεταβλητή δύναμη μετακινεί ένα σώμα



Ένα σώμα μάζας m ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή t=0, δέχεται την επίδραση μιας μεταβλητής οριζόντιας δύναμης, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σώματος και δαπέδου, με μέγιστη τιμή $T_{ορ}=T_{ολ}=10N$.

i) Ποιος ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος (μόλις δεχτεί την δύναμη F);

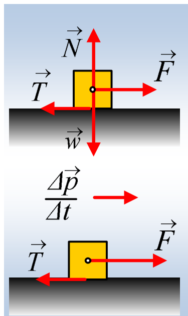
ii) Να υπολογιστεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1=4s$.

iii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2=8s$;

iv) Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη F μεταφέρει ενέργεια στο σώμα, τη χρονική στιγμή $t_3=16s$, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής, την ίδια στιγμή, αν το σώμα έχει μάζα m=2kg.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



Για όσο χρόνο το σώμα κινείται, δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης μέτρου $T_{ολ}=10N$, ενώ όταν δεν κινείται η τριβή θα είναι στατική με μέτρο από μηδέν έως 10N.

i) Τη στιγμή $t=t_0^+$ (αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F), επειδή $F>T_{ορ}$, το σώμα ολισθαίνει προς τα δεξιά και ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t}=F-T=(20-10)kg\cdot\frac{m}{s^2}=10kg\cdot\frac{m}{s^2}.$$

Με οριζόντια κατεύθυνση, ίδια με την συνισταμένη δύναμη, δηλαδή προς τα δεξιά.

ii) Η δύναμη F μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο, άρα θα υπακούει σε μια συνάρτηση της μορφής $F=\lambda t+\mu$. Αν αντικαταστήσουμε τις γνωστές τιμές σ΄ αυτήν, θα πάρουμε:

Με αντικατάσταση t=0, έχουμε 20=μ, ενώ για t=8s, F=0, οπότε $0=\lambda\cdot 8+20$ ή $\lambda=-2{,}5$. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$F=-2{,}5\cdot t+20 \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

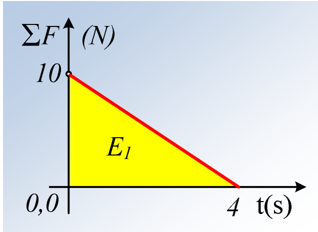
Αλλά τότε στο χρονικό διάστημα από 0-4s στο σώμα ασκείται συνισταμένη δύναμη, με τιμή:

$$\Sigma F=\Sigma F_x=F-T_{ολ}=-2{,}5t+20-10=-2{,}5t+10 \text{ (S.I.)}.$$

Με βάση τώρα όσα αναπτύχθηκαν στην ανάρτηση:

Η ορμή εξαιτίας σταθερής και μεταβλητής δύναμης

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση $ΣF=f(t)$ και το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, είναι αριθμητικά ίσο με την μεταβολή της ορμής του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Έτσι βρίσκουμε:



$$Δp=\frac{1}{2}ΣF\cdot t_1=\frac{1}{2}10\cdot 4\frac{kgm}{s}=20\frac{kgm}{s}$$

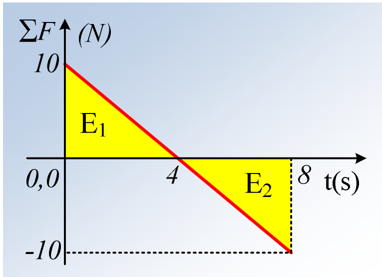
Όμως $Δp=p_1-p_0 \rightarrow p_1=Δp= 20\ kgm/s$.

Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της ορμής, θα έχουμε:

$$\frac{Δ\vec{p}}{Δt}=Σ\vec{F} \rightarrow \frac{Δp}{Δt}=ΣF=0$$

iii) Παραπάνω βρήκαμε ότι τη στιγμή t_1=4s η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται, ενώ στη συνέχεια η τιμή της γίνεται αρνητική. Ισοδύναμα η τριβή ολίσθησης έχει μεγαλύτερο μέτρο από την ασκούμενη δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα το σώμα να επιβραδύνεται. Έτσι το ερώτημα που προκύπτει είναι:

Θα υπάρχει κίνηση μέχρι τη χρονική στιγμή t_2=8s, οπότε εξασφαλίζουμε τριβή ολίσθησης 10N ή όχι;



Επειδή δεν το γνωρίζουμε, υποθέτουμε ότι το σώμα συνεχίζει να ολισθαίνει μέχρι και τη στιγμή t_2, οπότε κάνουμε ξανά το διάγραμμα $ΣF=f(t)$ προκειμένου να υπολογίσουμε την ορμή τη χρονική στιγμή t_2=8s. Αλλά τότε με βάση το σχήμα, η μεταβολή της ορμής από 0-8s είναι ίση:

$$Δp=E_1+E_2=\frac{1}{2}10\cdot 4+\frac{1}{2}(-10)\cdot 4=0$$

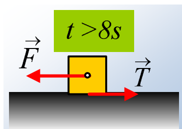
Όμως $Δp=p_2-p_0 \rightarrow p_2=Δp=0$.

Βλέπουμε δηλαδή ότι τη στιγμή t_2=8s η ορμή μηδενίζεται, οπότε μηδενίζεται και η ταχύτητα του σώματος και η κινητική ενέργεια.

Σημείωση: Με βάση τα μαθηματικά δεν υπάρχει αρνητικό εμβαδόν, οπότε θα μπορούσαμε να γράψουμε και $Δp=E_1-E_2$ αφαιρώντας τα δύο εμβαδά (τα οποία θα λαμβάναμε ως θετικά).

Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στο σώμα, είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης:

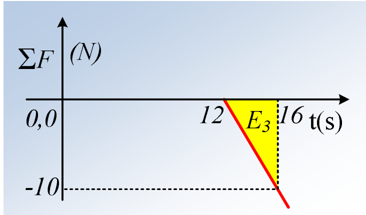
$$P_F=\frac{dW}{dt}=\frac{|F|\cdot|dx|\cdot συνα}{dt}=|F|\cdot|υ|\cdot συν0°=|F|\cdot|υ|\ (1)$$



Αφού μετά τη στιγμή t_2=8s η δύναμη έχει φορά προς τα αριστερά, αλλά και το σώμα θα κινηθεί προς τα αριστερά. Βέβαια δεν θα κινηθεί το σώμα άμεσα προς τ΄ αριστερά, μόλις η F αλλάξει κατεύθυνση, αφού αρχικά η δύναμη θα έχει μικρό μέτρο, με αποτέλεσμα η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα. Το σώμα θα αρχίσει την προς τ΄ αριστερά του κίνηση τη στιγμή που οριακά η δύναμη θα αποκτήσει μέτρο 10N, πράγμα που θα συμβεί τη χρονική στιγμή t΄=12s (γιατί;).

Έτσι για το διάστημα από τη στιγμή 12s έως τη στιγμή t_3=16s, θα έχουμε (θετική φορά προς τα δεξιά):

$\Sigma F = \Sigma F_x = T_{o\lambda} + F = 10 - 2,5t + 20 = 30 - 2,5t$ (S.I.)



Και με βάση το διάγραμμα:

$$\Delta p = E_3 = \frac{1}{2} 4 \cdot (-10) \frac{kgm}{s} = -20 \frac{kgm}{s}$$

Και πάλι το σώμα ξεκίνησε από την ηρεμία άρα και $p_3 = \Delta p = -20 kgm/s$, οπότε η ταχύτητα έχει τιμή:

$$p_3 = m\upsilon_3 \to \upsilon_3 = \frac{p_3}{m} = \frac{-20}{2} \frac{m}{s} = -10\, m/s$$

Με αντικατάσταση στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $|F| = 20N$, παίρνουμε:

$$\frac{dW_F}{dt} = |F| \cdot |\upsilon_3| = 20 \cdot 10 \frac{J}{s} = 200 \frac{J}{s}.$$

Εξάλλου ο ρυθμός με τον οποίο η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική, θα είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ισχύος της τριβής. Έτσι τη στιγμή t_3:

$$P_T = \frac{dW}{dt} = \frac{|T| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |T| \cdot |\upsilon_3| \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -|T| \cdot |\upsilon_3| \to$$

$$P_T = -|T| \cdot |\upsilon_3| = -10 \cdot 10 W = -100\, W$$

Οπότε:

$$\frac{dQ_\theta}{dt} = |P_T| = 100 \frac{J}{s}$$

dmargaris@gmail.com