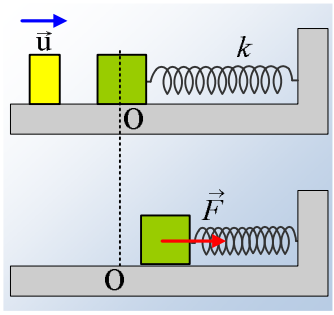
Μια ΑΑΤ και μια σύνθετη ταλάντωση



Ένα σώμα μάζας 1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου. Το σώμα συγκρούεται στιγμιαία με άλλο κινούμενο σώμα, με αποτέλεσμα να τίθεται σε ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης x_1=0,4·ημ(7t), (μονάδες στο S.I.).

i) Να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου, καθώς και η ενέργεια ταλάντωσης.

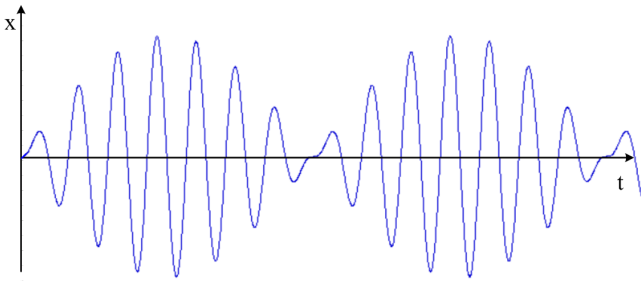
ii) Ακινητοποιούμε το σώμα και κάποια στιγμή (t_0=0) ασκούμε πάνω του μια οριζόντια μεταβλητή δύναμη της μορφής F=F_o·ημ(8t), όπως στο κάτω σχήμα. Το σώμα τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με εξίσωση κίνησης:

x= 0,27·ημ(7t) - 0,3·ημ(8t) (μονάδες στο S.I.)

α) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (x=0) και την ταχύτητα του σώματος τις χρονικές στιγμές t_1 =π/3 s και t_2= π s.

β) Να υπολογιστεί η κινητική και η δυναμική ενέργεια του σώματος τις παραπάνω στιγμές.

γ) Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.



Παρατηρούμε ότι η κίνηση παρουσιάζει διακροτήματα. Ποια η περίοδος του διακροτήματος και πόσες ταλαντώσεις εκτελεί το σώμα σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος;

Απάντηση:

i) Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς:

$$D=k=m\omega^2=1\cdot 7^2\ N/m=49N/m.$$

Με ενέργεια ταλάντωσης:

$$E=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}49\cdot 0{,}4^2 J=3{,}92J$$

ii) Η εξίσωση κίνησης που μας δίνεται, μας οδηγεί στη σκέψη ότι η κίνηση που πραγματοποιεί το σώμα, μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία μιας ταλάντωσης με την ιδιοσυχνότητα ω_o=7rad/s (ίδια με αυτήν της ΑΑΤ του προηγούμενου ερωτήματος) και μιας ταλάντωσης με γωνιακή συχνότητα ω=8rad/s, αυτής του διεγέρτη, αφού η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

x= 0,27·ημ(7t) + 0,3·ημ(8t+π) (S.I.)

α) Για τη χρονική στιγμή t_1, με αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης, παίρνουμε:

$$x= 0,27\cdot ημ(7t) - 0,3\cdot ημ(8t)= 0,27\cdot ημ(7\cdot π/3) - 0,3\cdot ημ(8\cdot π/3) \rightarrow$$

$$x_1 = 0,27\cdot ημ\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) - 0,3\cdot ημ\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = 0,27\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m - 0,3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m = -0,015\sqrt{3}\,m$$

$$x_1 \approx -0,03\,m$$

Εξάλλου από την αρχή της επαλληλίας, παίρνουμε και για την ταχύτητα του σώματος:

$$υ=υ_α+υ_β=υ_{οα}\cdot συν(7t) + υ_{οβ}\cdot συν(8t+π) \rightarrow$$

$$υ=1,89\cdot συν(7t) - 2,4\cdot συν(8t) \quad \text{(S.I.)}$$

Και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$υ_1 = 1,89\cdot συν\left(\frac{7\pi}{3}\right) - 2,4\cdot συν\left(\frac{8\pi}{3}\right) = 1,89\cdot συν\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2,4\cdot συν\left(\frac{2\pi}{3}\right)\rightarrow$$

$$υ_1 = 1,89\cdot\frac{1}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2,4\cdot\frac{1}{2}\frac{m}{s} \approx 2,1\frac{m}{s}.$$

Με την ίδια λογική με αντικατάσταση $t=t_2=π$ θα πάρουμε:

$$x_2 = 0,27\cdot ημ(7\pi) - 0,3\cdot ημ(8\pi) = 0$$

$$υ_2 = 1,89\cdot συν(7\pi) - 2,4\cdot συν(8\pi) = (1,89\cdot(-1) - 2,4\cdot 1)\frac{m}{s} = -4,29\,\frac{m}{s}$$

β) Για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2}mυ_1^2 = \frac{1}{2}1\cdot 2,1^2 J \approx 2,2J$$

$$U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}(mω_o^2)x_1^2 = \frac{1}{2}49\cdot 0,03^2 J \approx 0,02J$$

Αντίστοιχα τη στιγμή t_2, θα έχουμε:

$$K_2 = \frac{1}{2}mυ_2^2 = \frac{1}{2}1\cdot 4,29^2 J = 9,2J$$

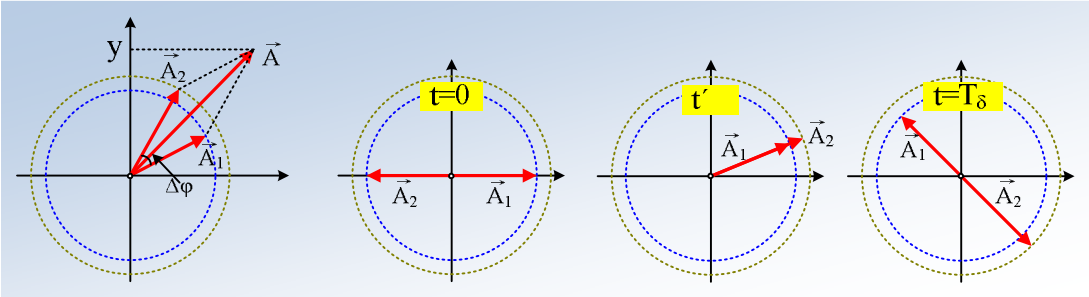
$$U_2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 = \frac{1}{2}(mω_o^2)x_2^2 = 0$$

γ) Ας επανέλθουμε στην εξίσωση κίνησης που γράψαμε με τη μορφή:

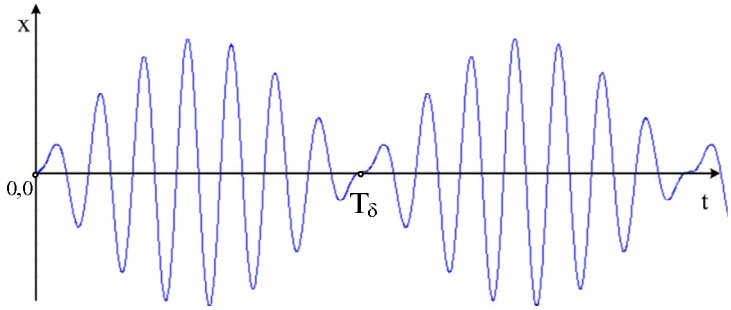
$$x= 0,27\cdot ημ(7t) + 0,3\cdot ημ(8t+π)$$

Τη χρονική στιγμή t=0, βρίσκουμε x=0, αφού τη στιγμή αυτή οι δύο ταλαντώσεις παρουσιάζουν διαφορά φάσης $Δφ_0=(8t+π)-(7t)=t+π=π$. Μετά από χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος, θα έχουμε ξανά την ίδια εικόνα, αλλά τώρα η διαφορά φάσης θα είναι $Δφ_T=T_δ+π=3π$.

Θα μπορούσαμε να δούμε την κατάσταση, εκμεταλλευόμενοι τα περιστρεφόμενα διανύσματα. Κατά την σύνθεση δύο ταλαντώσεων, μπορούμε να φανταστούμε δύο διανύσματα με μήκη A_1 και A_2, τα οποία περιστρέφονται και που η προβολή τους μας δίνει την απομάκρυνση για τη σύνθετη κίνηση, όπως στο αριστερό σχήμα.



Αν τα διανύσματα στρέφονται με διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες, τότε η διαφορά φάσης Δφ, που στο σχήμα είναι ίση με τη γωνία των δύο περιστρεφόμενων διανυσμάτων $\vec{A}_1$ και $\vec{A}_2$, δεν μένει σταθερή, αλλά μεταβάλλεται. Έτσι τη στιγμή t=0 η κατάσταση είναι αυτή του μεσαίου σχήματος, οπότε η συνισταμένη ταλάντωση έχει μηδενικό πλάτος (A=0), ενώ Δφ=π. Στη συνέχεια το διάνυσμα $\vec{A}_2$ στρέφεται λίγο πιο γρήγορα και κάποια στιγμή θα «προλάβει» το $\vec{A}_1$ (3ο σχήμα) οπότε το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης θα γίνει ίσο $A=A_1+A_2$, αλλά τότε το διάνυσμα $\vec{A}_2$ θα έχει διαγράψει γωνία μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία του $\vec{A}_1$ κατά π και θα ισχύει $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2\pi$! Στη συνέχεια, μια μεταγενέστερη στιγμή, η εικόνα θα είναι αυτή του 4ου σχήματος, όπου το $\vec{A}_2$ θα έχει «ξεφύγει» κατά άλλο ένα π, οπότε το πλάτος θα γίνει $A=A_2-A_1$, ενώ $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=3\pi$.



Έτσι επιστρέφοντας στη διαφορά φάσης, θα έχουμε:

$$\Delta\varphi=t+\pi \rightarrow 3\pi=T_\delta+\pi \rightarrow T_\delta=2\pi=6{,}28s.$$

Η γωνιακή συχνότητα της κίνησης είναι ίση:

$$\bar{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\frac{7+8}{2}rad/s=7{,}5\,rad/s$$

Οπότε και μέση συχνότητα $\bar{\omega}=2\pi\bar{f}\rightarrow\bar{f}=\frac{\bar{\omega}}{2\pi}=\frac{7{,}5}{2\pi}Hz=1{,}19Hz$

Έτσι σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος, το σώμα θα εκτελέσει:

$$N=\bar{f}\cdot T_\delta=1{,}19\cdot 6{,}28\ \approx 7{,}47\ \text{ταλαντώσεις}$$

dmargaris@gmail.com