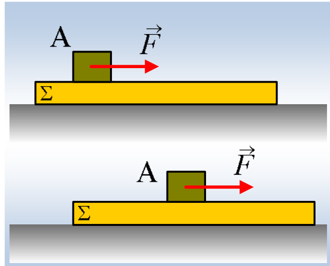
Η ορμή και η μεταβολή της σε ένα σύστημα



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μάζας M=3kg, πάνω στην οποία ηρεμεί ένα σώμα Α μάζας m=1kg. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στο σώμα Α ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=4N, όπως στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι το σώμα Α αρχίζει να γλιστράει πάνω στη σανίδα, συμπαρασύροντάς την και αυτήν προς τα δεξιά.

i) Να εξηγήσετε, πώς μπορεί να επιταχύνεται προς τα δεξιά η σανίδα.

ii) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος (σώμα Α-σανίδα), καθώς και η ολική ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.

iii) Αν τη στιγμή t_1 το σώμα Α έχει ταχύτητα $υ_1=4m/s$, να βρεθούν για τη στιγμή αυτή:

α) Η ταχύτητα της σανίδας.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής της σανίδας.

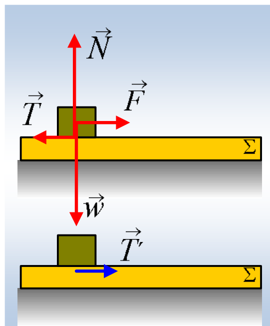
iv) Τη στιγμή t_1 παύει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$.

α) Να υπολογισθεί η ταχύτητα της σανίδας, τη στιγμή που το σώμα Α έχει ταχύτητα μέτρου $υ_2=3{,}2m/s$.

β) Μετά από λίγο, σώμα και σανίδα κινούνται με την ίδια ταχύτητα $\vec{υ}$. Να υπολογίστε το μέτρο της κοινής αυτής ταχύτητας, αν το σώμα Α συνεχίζει να βρίσκεται πάνω στη σανίδα.

γ) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική από τη στιγμή t_1, μέχρι τη στιγμή που μηδενίζεται η ασκούμενη δύναμη τριβής.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ. Η αντίδραση της τριβής ολίσθησης $\vec{T}$, η $\vec{T}'$ ασκείται στη σανίδα και την επιταχύνει προς τα δεξιά (όπου προς τα δεξιά κινείται και το σώμα Α). Στο κάτω σχήμα δεν έχουν σχεδιαστεί οι κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα.

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για κάθε σώμα ξεχωριστά, έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_A = \frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} = \vec{F} + \vec{T}$$

$$\Sigma\vec{F}_\Sigma = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \vec{T}'$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο παραπάνω εξισώσεων, παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t} = \vec{F} + \vec{T} + \vec{T}'$$

Αλλά το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος, ενώ $\vec{T}+\vec{T}'=0$ (δράση-αντίδραση), οπότε τελικά:

$$\frac{\Delta\vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t}=\vec{F}\rightarrow\frac{dp_{o\lambda}}{dt}=4kg\cdot m/s^2.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι και για το σύστημα των δύο σωμάτων ισχύει ο γενικευμένος νόμος, παίρνοντας τις **εξωτερικές** μόνο δυνάμεις. Ας σημειωθεί ότι παραπάνω δεν έχουμε πάρει τις κατακόρυφες δυνάμεις w, N… αφού η συνισταμένη τους είναι μηδενική, για κάθε σώμα.

Η παραπάνω δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, οπότε και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος παραμένει σταθερός για όλο το χρονικό διάστημα 0-t_1, με αποτέλεσμα η στιγμιαία τιμή του να συμπίπτει με την μέση τιμή, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t}=F\rightarrow\frac{p_{o\lambda,1}-0}{t_1}=F\rightarrow p_{o\lambda,1}=Ft_1=4\cdot 2kg\cdot m/s=8kg\cdot m/s.$$

iii) α) Για την ολική ορμή τη στιγμή t_1 ισχύει:

$$\vec{p}_A+\vec{p}_\Sigma=\vec{p}_{o\lambda}\rightarrow$$

$$m\upsilon_1+M\cdot u_1=p_{o\lambda,1}\rightarrow$$

οπότε λύνοντας ως προς u_1 παίρνουμε:

$$u_1=\frac{p_{o\lambda,1}-m\upsilon_1}{M}=\frac{8-1\cdot 4}{3}m/s={}^4\!/_3\,m/s$$

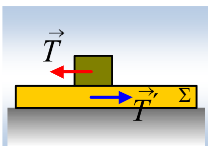
β) Αφού οι ασκούμενες σε κάθε σώμα δυνάμεις είναι σταθερές, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής τη στιγμή t_1 θα είναι ίσος και με το **μέσο** ρυθμό μεταβολής της ορμής, οπότε:

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt}=\frac{\Delta\vec{p}_A}{\Delta t}=\vec{F}+\vec{T}\rightarrow F+T=\frac{dp_A}{dt}=\frac{m\upsilon_1}{t_1-0}=\frac{1\cdot 4}{2}kg\cdot m/s^2=2kg\cdot m/s^2.$$

$$\frac{d\vec{p}_\Sigma}{dt}=\frac{\Delta\vec{p}_\Sigma}{\Delta t}=\vec{T}'\rightarrow T'=\frac{dp_\Sigma}{dt}=\frac{Mu_1}{t_1-0}=\frac{3\cdot {}^4\!/_3}{2}kg\cdot m/s^2=2kg\cdot m/s^2.$$

Αξίζει να «δούμε» ότι με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς, προκύπτει ότι η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο Τ=Τ΄=2Ν.

iv) Μόλις παύσει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$ το σύστημα των δύο σωμάτων αποτελεί ένα μονωμένο σύστημα, στο οποίο η ορμή παραμένει σταθερή, στο οποίο το σώμα Σ επιβραδύνεται από την τριβή, ενώ η σανίδα συνεχίζει να επιταχύνεται.



α) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. από τη στιγμή t_1 μέχρι που το σώμα Α να αποκτήσει ταχύτητα υ_2:

$$\vec{p}_{o\lambda,1}=\vec{p}_{o\lambda,2}\rightarrow m\upsilon_1+Mu_1=m\upsilon_2+Mu_2$$

$$u_2 = u_1 + \frac{m\upsilon_1 - m\upsilon_2}{M} = {}^{4}\!/_{3}\, m/s + \frac{1(4-3,2)}{3} m/s = 1,6 m/s.$$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα, για όσο χρόνο το σώμα Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από τη σανίδα θα δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης, εξαιτίας της οποίας θα επιβραδύνεται. Ταυτόχρονα η τριβή $\vec{T}'$ επιταχύνει τη σανίδα. Θα έρθει λοιπόν κάποια στιγμή που τα δυο σώματα θα αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα $\vec{v}$, οπότε τη στιγμή αυτή επειδή δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των σωμάτων η τριβή μηδενίζεται και έτσι, τα σώματα κινούνται πια μαζί με σταθερή ταχύτητα.

Εφαρμόζουμε ξανά την ΑΔΟ από τη στιγμή t_1, μέχρι τη στιγμή που τα σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα:

$$\vec{p}_{o\lambda,1} = \vec{p}_{o\lambda,\kappa} \rightarrow m\upsilon_1 + Mu_1 = (m+M)v \rightarrow$$

$$v = \frac{m\upsilon_1 + Mu_1}{m+M} = \frac{1\cdot 4 + 3\cdot {}^{4}\!/_{3}}{1+3} m/s = 2m/s.$$

γ) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή t_1 είναι ίση:

$$E_{M,1} = K_A + K_\Sigma = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Mu_1^2 = \frac{1}{2}1\cdot 4^2 J + \frac{1}{2}3\cdot\left({}^{4}\!/_{3}\right)^2 J = 8J + \frac{8}{3}J = \frac{32}{3}J$$

Ενώ μόλις τα σώματα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα, η μηχανική ενέργειας θα είναι ίση:

$$E_{M,\kappa} = K_A + K_\Sigma = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}(1+3)2^2 J = 8J$$

Συνεπώς έχουμε μείωση της μηχανικής (κινητικής) ενέργειας, η οποία μετατρέπεται σε θερμική κατά:

$$Q_\theta = E_{M,1} - E_{M,2} = \frac{32}{3}J - 8J = \frac{8}{3}J$$

dmargaris@gmail.com