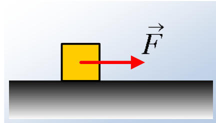
Η ορμή εξαιτίας σταθερής και μεταβλητής δύναμης



A) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα. Σε μια στιγμή t_0=0 ασκείται στο σώμα αυτό μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=4N.

i) Να υπολογιστεί η ορμή του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=5s.

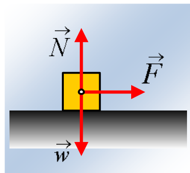
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση F-t και να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται μεταξύ γραφικής παράστασης και άξονα των χρόνων. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;

B) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα η ασκούμενη δύναμη $\vec{F}$, είναι μεταβλητή, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση F=4t (S.I.).

i) Να υπολογιστεί η ορμή του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=5s.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ορμής του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι της στιγμή t_2=6s και να βρείτε την κλίση της καμπύλης που θα πάρετε, τη στιγμή t_1.

Απάντηση:



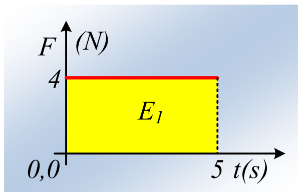
Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπου $\Sigma\vec{F}_y = 0$, αφού το σώμα ηρεμεί στην κατακόρυφη διεύθυνση. Οπότε $\Sigma\vec{F} = \vec{F}$, έχουμε δηλαδή κίνηση, η οποία οφείλεται στην άσκηση της δύναμης $\vec{F}$.

i) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα έχουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = F \quad (1)$$

$$\frac{p_1 - p_0}{t_1 - t_0} = F \rightarrow \frac{p_1 - 0}{t_1 - 0} = F \rightarrow$$

$$p_1 = F \cdot t_1 = 4 \cdot 5\ kg \cdot m/s = 20 kg \cdot m/s$$



ii) Η ασκούμενη δύναμη είναι σταθερή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα των χρόνων, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε το εμβαδόν του κίτρινου ορθογωνίου είναι ίσο:

$$E_1 = 4 \cdot 5\ m^2 = 20\ m^2$$

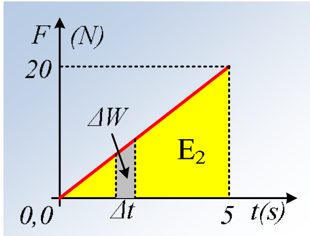
Ίσο αριθμητικά με την ορμή p_1 που απέκτησε το σώμα, εξαιτίας της δράσης της δύναμης. Αν όμως επανέλθουμε στη σχέση (1) θα δούμε ότι γενικότερα το γινόμενο F·Δt είναι ίσο με τη μεταβολή της ορμής του σώματος. Στην περίπτωσή μας βέβαια η αρχική ορμή ήταν μηδενική, οπότε Δp=p_1.

B) Παίρνοντας ξανά το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα, θα έχουμε:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = F$$

i) Τώρα όμως η δύναμη είναι μεταβλητή, οπότε στηριζόμαστε στο προηγούμενο συμπέρασμα για τον υπολογισμό της μεταβολής της ορμής.

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα F-t, όπως στο παρακάτω σχήμα.

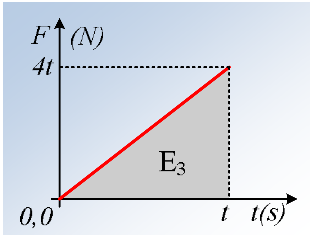


Αν πάρουμε ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt, τότε μπορούμε, χωρίς σοβαρό σφάλμα, να θεωρήσουμε το σχήμα με γκρι χρώμα, ως ορθογώνιο με πλευρές F και Δt, οπότε το εμβαδόν του θα είναι αριθμητικά ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της ορμής στο χρονικό διάστημα Δt. Αλλά τότε για να υπολογίσουμε τη συνολική μεταβολή της ορμής, αρκεί να χωρίσουμε το χρονικό διάστημα από 0-5s σε στοιχειώδη Δt και να προσθέσουμε τα αντίστοιχα εμβαδά. Αλλά τότε θα πάρουμε το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου, δηλαδή:

$$\Delta p = \frac{1}{2}F_1 \cdot t_1 = \frac{1}{2}20 \cdot 5\ kgm/s = 50\ kgm/s$$

Αρχικά όμως το σώμα ήταν ακίνητο άρα $p_0=0$ και $\Delta p=p_1-p_0 \rightarrow p_1=\Delta p=50\ kgm/s$.

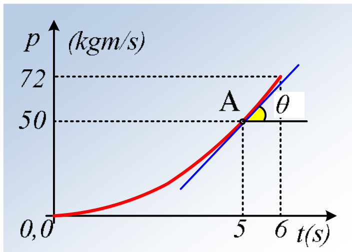
ii) Αν τώρα στο παραπάνω σχήμα, δεν πάρουμε το τρίγωνο, μέχρι τη στιγμή t_1, αλλά μια τυχαία στιγμή t, θα έχουμε το διπλανό σχήμα, οπότε η ορμή την τυχαία στιγμή t, θα είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του γκρι τριγώνου E_3:



$$p = \Delta p = \tfrac{1}{2}F \cdot t = \tfrac{1}{2}4t \cdot t = 2 \cdot t^2.$$

Τελικά δηλαδή έχουμε:

$$\mathrm{p} = 2t^2$$



Η παραπάνω συνάρτηση είναι δευτέρου βαθμού, η μορφή της οποίας είναι μια παραβολή (θυμηθείτε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση), όπως στο διπλανό σχήμα.

Εξάλλου η κλίση της παραπάνω συνάρτησης τη στιγμή t_1=5s, βρίσκεται αν στη θέση Α, φέρουμε την εφαπτόμενη στην καμπύλη, όπως στο σχήμα.

Αλλά η κλίση αυτή είναι ίση με:

$$\frac{\Delta \mathrm{p}}{\Delta t} = \text{εφθ} = F = 4t = 20kgm/s$$

dmargaris@gmail.com