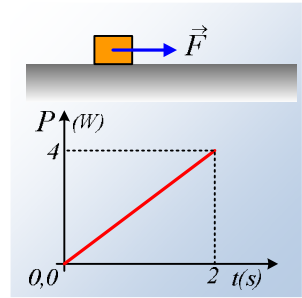


## Η ενέργεια σε μια περίοδο στην εξαναγκασμένη

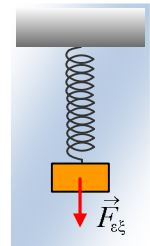
i) Ένα σώμα ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται μια δύναμη, η ισχύς της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διπλανό διάγραμμα.



Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή  $t=2s$ .

ii) Ένα σώμα μάζας  $m=0,5kg$  εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την εξάσκηση αρμονικής εξωτερικής δύναμης, ενώ δέχεται και δύναμη απόσβεσης της μορφής  $F_{απ}=-0,25 \cdot v$  (S.I.). Μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων, λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως  $t_0=0$ , παίρνουμε ως εξίσωση απομάκρυνσης την  $x=0,5 \cdot \eta\mu(4t)$  (S.I.).

α) Κάποια στιγμή  $t_1$  το σώμα περνά από τη θέση  $x_1=0,3m$  με θετική ταχύτητα, ενώ η εξωτερική δύναμη έχει τιμή  $F_1=1$  N. Να υπολογιστούν τη στιγμή  $t_1$ :



α<sub>1</sub>) Η ισχύς της εξωτερικής δύναμης και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης.

α<sub>2</sub>) Η δύναμη επαφής που ασκείται στο σώμα.

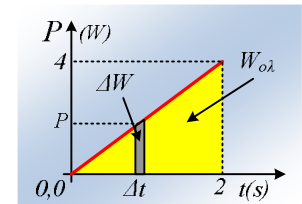
α<sub>3</sub>) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια του σώματος.

β) Να υπολογιστούν στη διάρκεια μιας περιόδου, τα έργα: της δύναμης επαφής, της δύναμης απόσβεσης και της διεγείρουσας εξωτερικής δύναμης.

### Απάντηση:

i) Από τον ορισμό της ισχύος μιας δύναμης, παίρνουμε:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \rightarrow \Delta W = P \cdot \Delta t$$



Ερχόμενοι τώρα στο διάγραμμα της ισχύος, παίρνοντας ένα στοιχειώδες  $\Delta t$  το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάση  $\Delta t$  και ύψος  $P$  (με γκρι χρώμα), είναι

ίσο με  $P \cdot \Delta t$ , δηλαδή ίσο με το παραγόμενο στοιχειώδες έργο  $\Delta W$ . Αλλά τότε το εμβαδόν του τριγώνου (με κίτρινο χρώμα), είναι αριθμητικά ίσο με το συνολικό έργο της δύναμης  $\vec{F}$ . Έχουμε δηλαδή:

$$W_F = \frac{1}{2} \beta \cdot v = \frac{1}{2} 2 \cdot 4 J = 4J$$

Οπότε παίρνοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα βρίσκουμε:

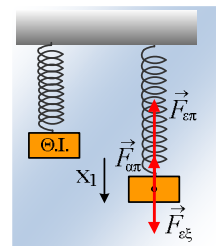
$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_N + W_F \rightarrow K_{τελ} = W_F = 4J$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα τη στιγμή  $t_1$ , που το σώμα κινείται προς τα κάτω με ταχύτητα  $v_1$ . Αν  $x_1=0,3m$ , τότε:

$$x=0,5 \cdot \eta\mu(4t) \rightarrow \eta\mu(4t)=x_1/0,5=0,6$$

Όμως  $\eta\mu^2(4t) + \sigma\upsilon\nu^2(4t)=1$  ή  $\sigma\upsilon\nu(4t) = 0,8$ , οπότε η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$v=v_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(4t)=\omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(4t)=2 \cdot 0,8m/s=1,6 m/s$$



α<sub>1</sub>) Η ισχύς μιας δύναμης ορίζεται από την σχέση:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{|F| \cdot |\Delta x| \cdot \sigma \nu \alpha}{\Delta t} = |F| \cdot |v| \cdot \sigma \nu \alpha$$

Με βάση αυτή, για την εξωτερική δύναμη θα έχουμε:

$$P_{εξ} = F_l \cdot v_l = 1 \cdot 1,6 \text{ W} = 1,6 \text{ W}$$

Ενώ ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική, είναι:

$$\frac{\Delta Q_{\theta}}{\Delta t} = |P_{F_{απ}}| = |F_{απ}| \cdot |v| = b v^2 = 0,25 \cdot 1,6^2 \text{ J/s} = 0,64 \text{ J/s}$$

α<sub>2</sub>) Από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \rightarrow F + F_{επ} + F_{απ} = m \cdot \alpha \rightarrow F + F_{επ} - b v_l = m \cdot \alpha$$

Όπου  $\alpha = -\omega^2 \cdot x_1 = -4^2 \cdot 0,3 \text{ m/s}^2 = -4,8 \text{ m/s}^2$ , οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$1 \text{ N} + F_{επ} - 0,25 \cdot 1,6 \text{ N} = -0,5 \cdot 4,8 \text{ N} \rightarrow F_{επ} = -3 \text{ N}$$

α<sub>3</sub>) Τη στιγμή t<sub>1</sub>, όσον αφορά τις ενέργειες έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 1,6^2 \text{ J} = 0,64 \text{ J}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \cdot x_1^2$$

Αλλά η δύναμη επαναφοράς που υπολογίσαμε προηγουμένως είναι ίση με:

$$F_{επ} = -D \cdot x \rightarrow D = -\frac{F_{επ}}{x} = -\frac{-3}{0,3} = 10 \text{ N/m} \rightarrow$$

$$U_1 = \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 0,3^2 \text{ J} = 0,45 \text{ J}$$

β) Το έργο της δύναμης επαναφοράς συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια με τη σχέση:

$$W_{F_{επ}} = U_{αρχ} - U_{τελ} \rightarrow$$

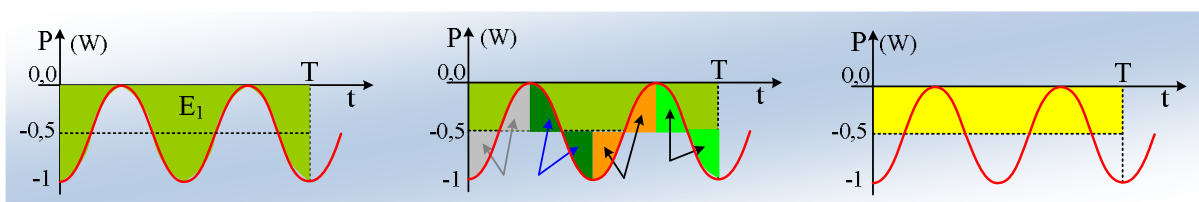
Αλλά τότε στη διάρκεια μιας περιόδου, όπου το σώμα επανέρχεται στην αρχική του θέση, θα ισχύει:

$$W_{F_{επ}} = 0$$

Στηριζόμεστε στα συμπεράσματα του i) ερωτήματος, οπότε κάνουμε το διάγραμμα της ισχύος της δύναμης απόσβεσης P<sub>F<sub>απ</sub></sub> σε συνάρτηση με το χρόνο, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$P = F_{απ} \cdot v \cdot \sigma \nu \alpha = -b \cdot v^2 = -0,25 \cdot 2^2 \cdot \sigma \nu \alpha^2(4t) = -1 \cdot \sigma \nu \alpha^2(4t)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, είναι μια συνημιτονοειδής καμπύλη, αφού από την Τριγωνομετρία  $\sigma \nu \alpha^2(4t) = \frac{1 + \sigma \nu \alpha(8t)}{2}$  (θυμηθείτε το διάγραμμα K=f(t) στην ΑΑΤ...), οπότε παίρνουμε τη γραφική παράσταση του παρακάτω σχήματος.



Τότε το εμβαδόν του χωρίου  $E_1$  μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα του χρόνου (πράσινο χρώμα στο αριστερό σχήμα), θα είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της δύναμης απόσβεσης. Αλλά αν προσέξουμε στο μεσαίο σχήμα, ανά δύο τα έγχρωμα χωρία, μπορούμε να αφαιρέσουμε καθένα από αυτά που βρίσκεται κάτω από τη γραμμή στην τιμή  $-0,5W$  και να προσθέσουμε τα αντίστοιχα πάνω από τη γραμμή και να γεμίσουμε τα κενά, με αποτέλεσμα να αντικαταστήσουμε το χωρίο  $E_1$  με το ορθογώνιο κίτρινου χρώματος του δεξιού! Έχουμε δηλαδή:

$$W_{F_{απ}} = -\beta \cdot v = -0,5 \cdot T = -0,5 \cdot \frac{2\pi}{\omega} J = -0,5 \cdot \frac{2\pi}{4} J = -0,76 J$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από 0-T και παίρνουμε:

$$K_T - K_0 = W_{F_{επ}} + W_{F_{απ}} + W_{F_{εξ}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 - \frac{1}{2} m v_{max}^2 = 0 - 0,76 + W_{F_{εξ}} \rightarrow$$

$$W_{F_{εξ}} = 0,76 J$$

### Σχόλιο:

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στη διάρκεια μιας περιόδου, όση ενέργεια αφαιρείται από το σύστημα και μετατρέπεται σε θερμική, εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης, τόση προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της διεγείρουσας δύναμης  $F_{εξ}$ . ( $W_{F_{απ}} = -0,76 J$  και  $W_{F_{εξ}} = +0,76 J$ ).

Προσοχή όμως αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε στιγμή, όπως π.χ. τη στιγμή  $t_1$  η διεγείρουσα δύναμη αναπληρώνει την ισχύ της δύναμης απόσβεσης. ( $P_{F_{απ}} = -0,64 W$  και  $P_{F_{εξ}} = +1,6 W$ ).

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)