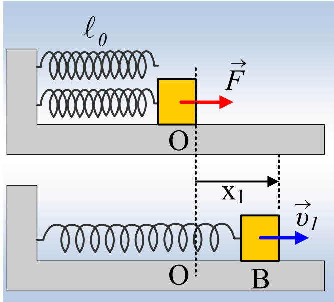
Η ενέργεια σε μια Εξαναγκασμένη Ταλάντωση



Ένα σώμα μάζας 0,2kg είναι δεμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=16N/m και με την επίδραση μιας εξωτερικής αρμονικής δύναμης F, εκτελεί ταλάντωση, όπου (μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων) η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) έχει τη μορφή x=0,5·ημ(10t) (S.I.). Στη διάρκεια της ταλάντωσης το σώμα δέχεται αντίσταση από τον αέρα της μορφής $F_{απ}$=-0,2·υ (μονάδες στο S.I.).

i) Να υπολογιστούν η μέγιστη κινητική και η μέγιστη δυναμική ενέργεια του σώματος στη διάρκεια της εξαναγκασμένης αυτής ταλάντωσης.

ii) Για τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση Β του σχήματος, με απομάκρυνση x_1=0,4m και με θετική (προς τα δεξιά) ταχύτητα, να βρεθούν:

α) Η επιτάχυνση και η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$.

β) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια. Πόσο είναι το άθροισμα K+U;

γ) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

δ) Η ισχύς της εξωτερικής δύναμης, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της αντίστασης αέρα.

Απάντηση:

Αφού η απομάκρυνση ικανοποιεί την εξίσωση x=A·ημ(ωt), η ταχύτητα θα είναι της μορφής:

$$\upsilon=A\omega\cdot συν(\omega t) = 0,5\cdot 10\cdot συν(10t) = 5\cdot συν(10t) \ \ \text{(S.I.)}$$

Και αντίστοιχα η επιτάχυνση:

$$\alpha= -\omega^2\cdot x= -50\cdot ημ(10t) \ \ \text{(S.I.)}$$

i) Η μέγιστη κινητική ενέργεια εμφανίζεται τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα μέτρου υ_{max}=5m/s, παίρνοντας την τιμή:

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}0,2\cdot 5^2\,J = 2,5J$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}16\cdot 0,5^2\,J = 2J$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι δυο παραπάνω μέγιστες τιμές, δεν είναι ίσες, όπως συμβαίνει στην ΑΑΤ.

ii) Έστω ότι το σώμα φτάνει στη θέση Β, κάποια στιγμή t_1 έχοντας ταχύτητα υ_1. Από τις εξισώσεις x και υ παίρνουμε:

$$x = A\cdot\eta\mu(\omega t) \rightarrow \eta\mu(\omega t) = \frac{x}{A} \quad \text{και}$$

$$\upsilon = \upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t) \rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \frac{\upsilon}{\upsilon_{max}}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε:

$$\eta\mu^2(\omega t) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \rightarrow$$

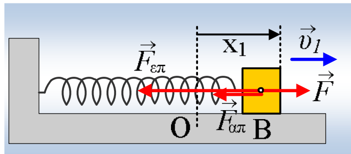
$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 10\sqrt{0,5^2 - 0,4^2}\, m/s = \pm 3m/s$$

Οπότε αφού το σώμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση υ_1=+ 3m/s.

α) Για την επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha_1 = -\omega^2\cdot x = -100\cdot x_1 = -100\cdot 0,4\ m/s^2 = -40 m/s^2.$$

Ενώ από το 2º νόμο του Νεύτωνα έχουμε:



$$\Sigma F = m\cdot\alpha_1 \rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\pi} + F = m\cdot\alpha_1 \rightarrow -Dx - b\upsilon_1 + F = m\alpha_1$$

Και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$-16\cdot 0,4N - 0,2\cdot 3N + F = 0,2\cdot(-40)N \rightarrow \quad F = -1N$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ έχει αντίθετη φορά από αυτήν που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.

β) Για τις ενέργειες έχουμε:

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}16\cdot 0,4^2\, J = 1,28J$$

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}0,2\cdot 3^2\, J = 0,9J$$

Με άθροισμα:

$$K_1 + U_1 = 0,9J + 1,28J = 2,18J.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ενέργεια αυτή, η ενέργεια ταλάντωσης στη θέση Β, έχει διαφορετική τιμή, από τις ενέργειες που υπολογίσαμε στο ερώτημα i).

γ) Για τους ρυθμούς μεταβολής των παραπάνω ενεργειών έχουμε:

$$\frac{dU_1}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o = +kx_1\cdot\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\frac{dU_1}{dt} = 16\cdot 0,4\cdot 3J/s = +19,2J/s$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |m\alpha_1|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o = -m|a_1|\cdot\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -m|a_1| \cdot \upsilon_1 = -0,2 \cdot 40 \cdot 3J/s = -24J/s$$

δ) Για την ισχύ της εξωτερικής δύναμης έχουμε:

$$P_F=|F|\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=- |F|\cdot\upsilon = - 1\cdot 3\ W= -3W$$

Ενώ η αντίστοιχη ισχύς της δύναμης απόσβεσης, η οποία μετράει το ρυθμό με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική:

$$P_{F\alpha\pi}=|F_{\alpha\pi}|\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=- |F_{\alpha\pi}|\cdot\upsilon = - 0,6\cdot 3\ W= -1,8W$$

Συνεπώς $\dfrac{dQ_{\theta\varepsilon\rho}}{dt} = \left|P_{F_{\alpha\pi}}\right| = +1,8J/s$

Σχόλια:

1. Μπορούμε να δούμε συμπερασματικά, τι συμβαίνει με τις ενέργειες στη θέση Β. Η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά 24J/s. Τι γίνεται η ενέργεια αυτή; Τα 19,2J/s μετατρέπονται σε δυναμική ενέργεια αυξάνοντας την τιμή της, τα 1,8J/s μετατρέπονται σε θερμική, ενώ τα υπόλοιπα 3J/s αφαιρούνται από το σύστημα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$. (24=19,2+1,8+3)
2. Η παραπάνω μελέτη, νομίζω ότι ανέδειξε ότι η διατήρηση της ενέργειας, δεν προβλέπει καμιά διατήρηση ενέργειας ταλάντωσης (U+K)! Για το λόγο αυτό υπολογίσαμε και την ταχύτητα στη θέση Β, τριγωνομετρικά και όχι ενεργειακά! Για τους πιο δύσπιστους, δεν έχουν παρά να ελέγξουν τα αποτελέσματα για την ενέργεια ταλάντωσης, στη θέση ισορροπίας, στη θέση πλάτους και στη θέση Β.
3. Με βάση τα παραπάνω, είναι λάθος να πούμε ότι κάθε στιγμή η εξωτερική δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σύστημα για να αναπληρώνει τις απώλειες, εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης. Αυτό δεν ισχύει γενικά (εκτός μιας ειδικής περίπτωσης…), αφού παραπάνω βρήκαμε ότι μπορεί ΚΑΙ η εξωτερική δύναμη να αφαιρεί ενέργεια (και να μην δίνει…) από το σώμα. Το σωστό είναι ότι, στη διάρκεια μιας περιόδου, όση ενέργεια αφαιρείται από το σώμα μέσω του έργου της $\vec{F}_{\alpha\pi}$, τόση ενέργεια μεταφέρεται στο σώμα, μέσω του έργο της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$.

dmargaris@gmail.com