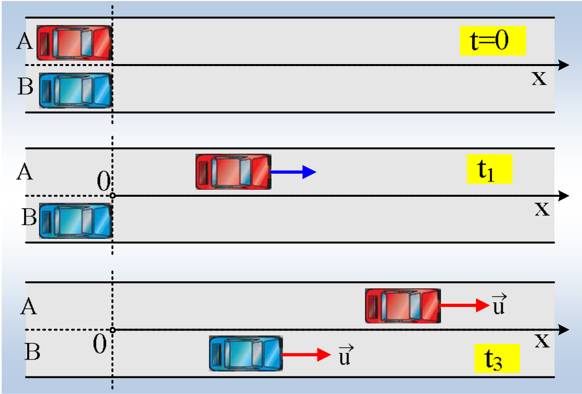
Δύο κινήσεις και ο αφηρημένος οδηγός.



Στο φανάρι ενός ευθύγραμμου δρόμου, το οποίο έχει ανάψει κόκκινο, βρίσκονται ακίνητα δύο αυτοκίνητα Α και Β. Τη στιγμή που το φανάρι γίνεται πράσινο (t_0=0), ο οδηγός του Α αυτοκινήτου του προσδίδει σταθερή επιτάχυνση μέτρου $α_1$=2m/s^2, με την οποία κινείται. Αντίθετα ο οδηγός του Β αυτοκινήτου ήταν αφηρημένος και καθυστέρησε την εκκίνηση για 4s, ενώ στη συνέχεια προσέδωσε σταθερή επιτάχυνση στο όχημά του $α_2$=3m/s^2. Θεωρούμε τη θέση του φαναριού ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, με θετική φορά προς τα δεξιά.

i) Να δοθούν οι εξισώσεις της ταχύτητας $υ_A(t)$ και της θέσης $x_A(t)$ για το αυτοκίνητο Α και να βρείτε την θέση και την ταχύτητά του τη στιγμή t_1=4s.

ii) Να γραφτούν οι αντίστοιχες εξισώσεις ταχύτητας $υ_B(t)$ και της θέσης $x_B(t)$ για το αυτοκίνητο Β.

iii) Υποστηρίζεται ότι μόλις ξεκινήσει το Β αυτοκίνητο, η απόσταση μεταξύ των δύο οχημάτων θα αρχίσει να μειώνεται, μιας και αυτό αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση από το Α. Μπορούμε να ελέγξουμε την παραπάνω υπόθεση με δυο τρόπους.

α) Να υπολογίσουμε τη μετατόπιση κάθε αυτοκινήτου για χρονικό διάστημα Δt=2s, μετά την εκκίνηση του δεύτερου. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε;

β) Να βρούμε τις θέσεις των δύο οχημάτων τη χρονική στιγμή t_2=6s. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αυτοκινήτων τη στιγμή αυτή; Να συγκριθεί με την μεταξύ τους απόσταση τη στιγμή t_1.

iv) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή t_3 τα δύο αυτοκίνητα κινούνται με την ίδια ταχύτητα u. Τη στιγμή αυτή να βρεθούν οι ταχύτητες και οι θέσεις των δύο αυτοκινήτων. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αυτοκινήτων τη στιγμή αυτή;

v) Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των δύο αυτοκινήτων τη στιγμή $t_4=t_3$+2s. Μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα για το τι γίνεται με την απόσταση των δύο αυτοκινήτων, στη διάρκεια των παραπάνω κινήσεων;

Απάντηση:

i) Το αυτοκίνητο Α κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, για την οποία ισχύουν:

$$υ_A=α_1 \cdot t \ (1) \quad \text{και} \ Δx= x_A= ½\ α_1 \cdot t^2 \quad (2)$$

Οπότε τη στιγμή t_1, που ξεκινά το Β αυτοκίνητο, με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$υ_{A,1}=α_1 \cdot t_1=2 \cdot 4 m/s=8\ m/s \ \text{ και } \ x_{A,1}= ½\ 2 \cdot 4^2 m=16m.$$

ii) Και το Β αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, όπως και το Α, με μόνη διαφορά ότι άργησε να ξεκινήσει, οπότε το χρονικό διάστημα της κίνησής του θα είναι $Δt=t-t_1$, με αποτέλεσμα οι παραπάνω εξισώσεις να παίρνουν τις μορφές:

$$\upsilon_B=\alpha_2\cdot\Delta t \;\rightarrow \upsilon_B=\alpha_2\cdot(t-4) \text{ (μονάδες στο S.I.) (3) και}$$

$$\Delta x= x_B= ½\, \alpha_2\cdot(\Delta t)^2 \;\rightarrow x_B= ½\, \alpha_2\cdot(t-4)^2 \text{ (μονάδες στο S.I.) (4)}$$

iii) Τη χρονική στιγμή t_1=4s που ξεκινά το Β αυτοκίνητο, η απόστασή του από το Α είναι ίση με $d_1=x_{A1}$=16m.

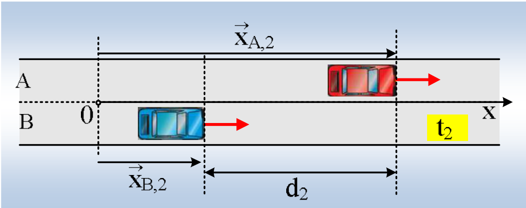
α) Σε χρονικό διάστημα Δt=2s, μετά τη στιγμή t_1 έχουμε μετατοπίσεις:

Το Α αυτοκίνητο: $\Delta x_A=\upsilon_{A,1}\cdot\Delta t + ½\, \alpha_1\cdot(\Delta t)^2=8\cdot 2m+ ½\, 2\cdot 2^2 m=20m$

Το Β αυτοκίνητο: $\Delta x_B= ½\, \alpha_2\cdot(\Delta t)^2 = ½\, 3\cdot 2^2 m=6m.$

Βλέπουμε ότι το Α αυτοκίνητο μετατοπίζεται περισσότερο από το Β και αυτό συμβαίνει γιατί έχει ήδη αποκτήσει ταχύτητα 8m/s, οπότε παρότι έχει μικρότερη επιτάχυνση, διανύει μεγαλύτερη απόσταση και έτσι η απόσταση των δύο οχημάτων αυξάνεται.

β) Με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2) και (4) βρίσκουμε τις θέσεις των δύο οχημάτων τη στιγμή t_2=6s:



Για το Α: $x_{A,2}= ½\, \alpha_1\cdot t^2 = ½\, 2\cdot 6^2 s= 36m$

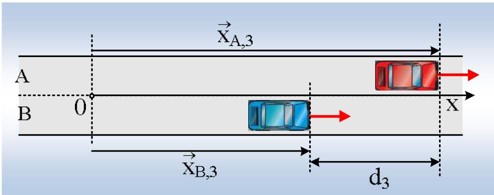
Για το Β: $x_{B,2}= ½\, \alpha_2\cdot(t-4)^2 = ½\, 3\cdot(6-4)^2 m =6m$

Αλλά τότε η απόσταση των δύο αυτοκινήτων είναι ίση:

$$d_2=x_{A,2}-x_{B,2}= 36m-6m=30m$$

Προφανώς πολύ μεγαλύτερη από την αρχική τους απόσταση τη στιγμή t_1, όπου ήταν ίση με $d_1=x_{A,1}$=16m.

iv) Τη στιγμή t_3 που τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα θα ισχύει $\upsilon_A=\upsilon_B$=u και από τις εξισώσεις (1) και (3) παίρνουμε:



$$\upsilon_A=\upsilon_B \rightarrow \alpha_1\cdot t= \alpha_2\cdot(t-4) \rightarrow 2t=3(t-4) \rightarrow$$

$$2t=3t-12 \;\; ή \;\; t_3=12s$$

Τη στιγμή αυτές τα οχήματα έχουν ταχύτητες:

$$u=\alpha_1\cdot t_3=2\cdot 12m/s=24m/s$$

Ενώ για τις θέσεις τους θα έχουμε:

$x_{A,3}= ½\, \alpha_1\cdot t^2= ½\cdot 2\cdot 12^2 m=144m$

$x_{B,3}= ½\, \alpha_2\cdot(t-4)^2 = ½\, 3\cdot(12-4)^2 m =96m$

Αλλά τότε η απόσταση μεταξύ τους είναι:

$$d_3=x_{A,3}-x_{B,3}=144m-96m=48m.$$

v) Δουλεύοντας όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, βρίσκουμε τις θέσεις των δύο αυτοκινήτων τη στιγμή t_4=14s:

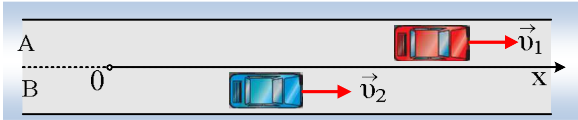
$$x_{A,4}= ½\, \alpha_1\cdot t^2= ½\cdot 2\cdot 14^2 m=196m$$

$$x_{B,4}= ½\, \alpha_2\cdot(t-4)^2 = ½\, 3\cdot(14-4)^2 m =150m$$

Οπότε η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση:

$$d_4=x_{A,4}-x_{B,4}=196m=150m = 46m.$$

Από τη σύγκριση των παραπάνω αποτελεσμάτων βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των δύο οχημάτων είναι τη στιγμή που τα κινητά έχουν την ίδια ταχύτητα, τη στιγμή t_3, όπου η απόσταση πήρε την τιμή d_3=48m.



Μπορούμε να το ερμηνεύσουμε; Για όσο χρονικό διάστημα $\upsilon_1 > \upsilon_2$ το Α αυτοκίνητο απομακρύνεται από το Β με αποτέλεσμα η μεταξύ τους απόσταση να αυξάνεται. Αν $\upsilon_1 < \upsilon_2$, τότε το Β αυτοκίνητο πλησιάζει το Α και η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται. Αλλά τότε ξεκινώντας από την κατάσταση που το Α έχει μεγαλύτερη ταχύτητα έχουμε αύξηση της απόστασής τους μέχρι τη στιγμή που εξισώνονται οι δυο ταχύτητες και εμφανίζεται η μέγιστη απόσταση μεταξύ τους , ενώ στη συνέχεια η απόσταση μεταξύ των δύο αυτοκινήτων, θα μειώνεται.

dmargaris@gmail.com