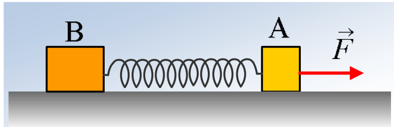
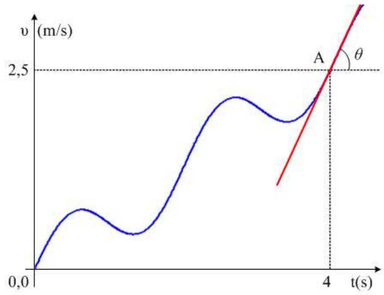
Ένα σύστημα και η μελέτη του από διάγραμμα ταχύτητας



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σώματα Α και Β, δεμένα στα άκρα ενός αβαρούς ιδανικού ελατηρίου. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκείται στο σώμα Α, μάζας $m_1=2kg$, μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=4N, η οποία έχει τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, όπως στο σχήμα. Στο διπλανό διάγραμμα βλέπετε την ταχύτητα του Α σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου τη στιγμή $t_1=4s$ το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά Δx=5,4m, έχοντας ταχύτητα $υ_1=2,5m/s$, ενώ παίρνοντας την εφαπτομένη της καμπύλης υ-t την παραπάνω στιγμή, βρίσκουμε ότι έχει κλίση εφθ=1,9.



Για την στιγμή t_1, να βρεθούν:

i) Η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α.

ii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για το σώμα Β;

iii) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή t_1. Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια αυτή;

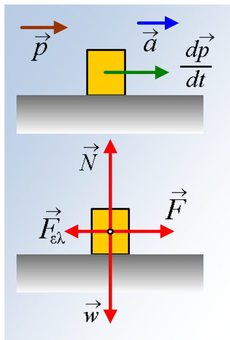
iv) Αν το σώμα Β έχει μάζα $m_2=4kg$, ποια η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας αυτής;

Απάντηση:

Η κλίση σε ένα διάγραμμα υ-t, μας δίνει την στιγμιαία επιτάχυνση του σώματος. Έτσι εδώ, τη στιγμή t_1, έχουμε επιτάχυνση:

$$\alpha_1 = \frac{dv}{dt} = εφθ = 1{,}9\ m/s^2.$$

i) Η ορμή του Α σώματος τη στιγμή t_1 έχει κατεύθυνση ίδια με αυτή της δύναμης $\vec{F}$, και μέτρο:



$$p_1 = m_1 \cdot υ_1 = 2\cdot 2{,}5\ kg\cdot m/s = 5\ kg\cdot m/s.$$

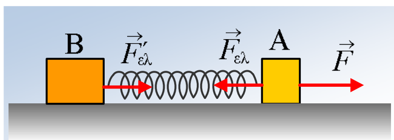
Ενώ από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Α παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \Sigma\vec{F} = m\vec{a}_1 \quad (1)$$

Άρα και το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της ορμής, είναι οριζόντιο με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$\frac{dp_1}{dt} = m\alpha_1 = 2\cdot 1{,}9\ kg\cdot m/s^2 = 3{,}8\ kg\cdot m/s^2.$$

ii) Αν πάρουμε το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα, θα έχουμε (η συνισταμένη των κατακόρυφων δυνάμεων είναι μηδενική και δεν μας…απασχολούν):



$$\frac{d\vec{p}_{o\lambda}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} \ (2) \rightarrow$$

Αλλά $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = 0$, οπότε παίρνουμε:

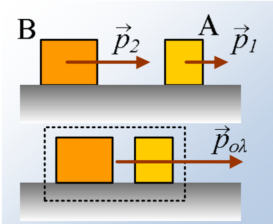
$$\frac{d\vec{p}_{o\lambda}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \frac{dp_{o\lambda}}{dt} = F = 4\ kg{\cdot}m/s$$

Η δύναμη $\vec{F}$ όμως παραμένει σταθερή, συνεπώς και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος θα παραμένει σταθερός και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\frac{d\vec{p}_{o\lambda}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} = \vec{F} \rightarrow \frac{\vec{p}_{o\lambda}-0}{t_1-0} = \vec{F} \rightarrow$$

$$p_{o\lambda} = F \cdot t_1 = 4{\cdot}4\ kg{\cdot}m/s = 16\ kg{\cdot}m/s$$

Βέβαια η ολική ορμή του συστήματος, είναι ίση με το άθροισμα (διανυσματικό) των ορμών των σωμάτων Α και Β, $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ αντίστοιχα. Δηλαδή έχουμε:



$$\vec{p}_{o\lambda} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \rightarrow$$

$$p_2 = p_{o\lambda} - p_1 = 16\ kg{\cdot}m/s - 5\ kg{\cdot}m/s = 11\ kg{\cdot}m/s$$

Οπότε επιστρέφοντας στην (2) παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{p}_{o\lambda}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{dp_{o\lambda}}{dt} - \frac{dp_1}{dt} = (4 - 3{,}8)\ kg{\cdot}m/s = 0{,}2\ kg{\cdot}m/s.$$

iii) Ενέργεια στο σύστημα μεταφέρθηκε μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, οπότε:

$$E_{\mu\eta\chi} = W_F = F{\cdot}\Delta x = 4{\cdot}5{,}4J = 21{,}6J$$

Η ενέργεια αυτή εμφανίζεται με την μορφή της κινητικής ενέργειας των σωμάτων Α και Β και με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

iv) Τη στιγμή t_1 το σώμα Β έχει κινητική ενέργεια $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ όπου $v_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{11}{4}m/s$, οπότε:

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}4\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2 J = \frac{121}{8}J$$

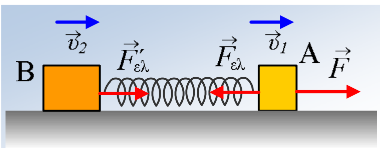
Αλλά: $E_{\mu\eta\chi} = K_1 + K_2 + U_{\varepsilon\lambda} \rightarrow$

$$U_{\varepsilon\lambda} = E_{\mu\eta\chi} - \frac{1}{2}mv_1^2 - K_2 = 21{,}6 - \frac{1}{2}2\cdot 2{,}5^2 J - \frac{121}{8}J = 0{,}225J$$

Επιστρέφοντας στην (1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΣF=3,8Ν, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} \rightarrow \Sigma F = F + F_{\varepsilon\lambda} \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = \Sigma F - F = 3{,}8N - 4N = -0{,}2N$$

Άρα το ελατήριο ασκεί δύναμη στο σώμα Α με φορά προς τα αριστερά, όπως υποθέσαμε στο σχήμα του ii) ερωτήματος, πράγμα που σημαίνει ότι το ελατήριο έχει κάποια επιμήκυνση Δl.



Βρίσκουμε την ισχύ της δύναμης που το ελατήριο ασκεί σε κάθε σώμα:

$$P_{F_{\varepsilon\lambda}} = -F_{\varepsilon\lambda} \cdot \upsilon_1 = -0{,}2 \cdot 2{,}5W = -0{,}5W$$

$$P_{F'_{\varepsilon\lambda}} = +F'_{\varepsilon\lambda} \cdot \upsilon_2 = 0{,}2 \cdot \frac{11}{4}W = 0{,}55W$$

Τι εκφράζουν οι παραπάνω τιμές; Το ελατήριο **αφαιρεί** ενέργεια από το Α σώμα, με ρυθμό 0,5 J/s, ενώ **προσφέρει** ενέργεια στο σώμα Β με ρυθμό 0,55J/s. Αυτό μπορεί να συμβεί αν δεχθούμε ότι μειώνεται η ενέργεια που έχει το ίδιο το ελατήριο κατά (0,55-0,5) J/s=0,05 J/s.

Με άλλα λόγια τη στιγμή αυτή το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια U_1=0,225J, ενώ η ενέργεια αυτή μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{\Delta U}{\Delta t} = -0{,}05\frac{J}{s}$.

dmargaris@gmail.com