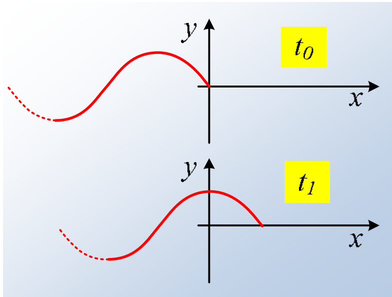
Ένα οδεύον προς τα δεξιά κύμα



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται χωρίς απώλειες ένα αρμονικό κύμα, το οποίο τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει σε ένα σημείο Ο, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική. Το σημείο Ο ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά του άξονα y) και φτάνει σε μέγιστη απομάκρυνση 0,2m τη στιγμή $t_1=0{,}2s$. Το κύμα φτάνει σε ένα σημείο Κ, στη θέση $x_K=x_2=3{,}5m$ τη χρονική στιγμή $t_2=1{,}4s$.

i) Να γράψετε τις εξισώσεις για την απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, για τις ταλαντώσεις που θα εκτελέσουν τα σημεία Ο και Κ.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

iii) Να σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t_2 που το κύμα φτάνει στο σημείο Κ και για την περιοχή του θετικού ημιάξονα. Ποια η απομάκρυνση του σημείου Ο την παραπάνω χρονική στιγμή;

iv) Ένα σημείο Λ, βρίσκεται στη θέση $x_Λ={}^4\!/_3$ m.

α) Να βρεθούν η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Λ τη στιγμή t_2.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ και για το χρονικό διάστημα από 0-t_2.

Απάντηση:

i) Το σημείο Ο αρχίζει την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή $t_0=0$, ξεκινώντας από την θέση ισορροπίας του και κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. Άρα η απομάκρυνσή του δεν παρουσιάζει αρχική φάση, το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με Α=0,2m, ενώ ο χρόνος για να φτάσει σε θέση πλάτους είναι ίσος με ¼ T, οπότε $T=4\cdot t_1=4\cdot 0{,}2s=0{,}8s$. Με βάση αυτά η εξίσωση της απομάκρυνσής του παίρνει τη μορφή:

$$y_O = A\cdot ημ\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{2\pi t}{0{,}8}\right) = 0{,}2\cdot ημ(2{,}5\pi t)\ \text{(S.I.) με } t\geq 0.$$

Την ίδια ταλάντωση θα εκτελέσει και το σημείο Κ, απλά με χρονική καθυστέρηση t_2, οπότε η αντίστοιχη εξίσωση θα παίρνει τη μορφή:

$$y_K = A\cdot ημ\left(\frac{2\pi t'}{T}\right) = 0{,}2\cdot ημ\left(\frac{5\pi}{2}(t-t_2)\right) = 0{,}2\cdot ημ(2{,}5\pi t - 3{,}5\pi)\ \text{(S.I.) με } t\geq 1{,}4s.$$

ii) Η ταχύτητα του κύματος, με εκμετάλλευση των δεδομένων για το σημείο Κ, είναι:

$$υ = \frac{x_K}{t_K} = \frac{3{,}5m}{1{,}4s} = 2{,}5m/s$$

$$\text{Αλλά } υ=λ\cdot f \rightarrow λ = \frac{υ}{f} = υT = 2{,}5\cdot 0{,}8m = 2m$$

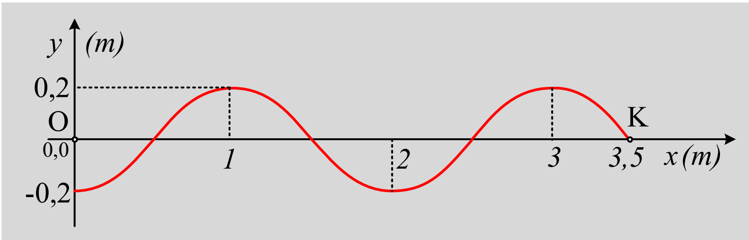
Με την ίδια λογική τώρα, για ένα τυχαίο σημείο Σ που βρίσκεται στη θέση x, το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει σε αυτό, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση (του βιβλίου…):

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0{,}8} - \frac{x}{2}\right) \text{ (1) (S.I.) με } t \geq 0 \text{ και } x \leq \upsilon \cdot t \text{ ή } x \leq 2{,}5 \cdot t$$

iii) Με αντικατάσταση t=1,4s στην εξίσωση του κύματος (1) παίρνουμε:

$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{1{,}4}{0{,}8} - \frac{x}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(\pi\frac{7}{2} - 2\pi\frac{x}{2}\right) = -0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi\frac{x}{2}\right) \text{ (2) με } x \leq 3{,}5\text{m.}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης (το στιγμιότυπο του κύματος…) έχει τη μορφή:



Με βάση το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι το σημείο Ο έχει απομάκρυνση y_O=-0,2m. Βέβαια αν θέλουμε να είμαστε…αποδεικτικοί, δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε στην (2) x=0, παίρνοντας:

$$y = -0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi\frac{0}{2}\right) = -0{,}2m$$

iv) Για το σημείο Λ στη θέση $x_\Lambda = {}^4\!/_3$ m παίρνουμε από την εξίσωση του κύματος, με αντικατάσταση του x:

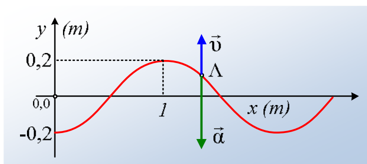
$$y_\Lambda = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0{,}8} - \frac{x}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0{,}8} - \frac{{}^4\!/_3}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(2{,}5\pi \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

α) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση $t=t_2$ παίρνουμε:

$$y_\Lambda = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(2{,}5\pi \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(2{,}5\pi \cdot 1{,}4 - \frac{4\pi}{3}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(\frac{13\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$y_\Lambda = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} m = 0{,}1m$$

Όμοια για ταχύτητα και επιτάχυνση θα έχουμε:



$$\upsilon_\Lambda = 0{,}2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2{,}5\pi \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$\upsilon_\Lambda = \frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \frac{m}{s} \approx 1{,}36 \, m/s$$

$$a_\Lambda = -0{,}2 \cdot \omega^2 \cdot \eta\mu \left(2\pi\frac{1{,}4}{0{,}8} - 2\pi\frac{2}{3}\right) = -0{,}2 \cdot (2{,}5\pi)^2 \cdot \eta\mu \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$a_\Lambda = -0{,}2 \cdot 62{,}5 \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{6}\right) \approx -6{,}2 \, m/s^2$$

Στο διπλανό σχήμα έχει σημειωθεί το σημείο Λ, καθώς και τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$.

β) Το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή που φτάνει σε αυτό, το κύμα:

$$\upsilon = \frac{x_\Lambda}{t_\Lambda} \rightarrow t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{\upsilon} = \frac{{}^4\!/_3}{2{,}5} s = \frac{8}{15} s.$$

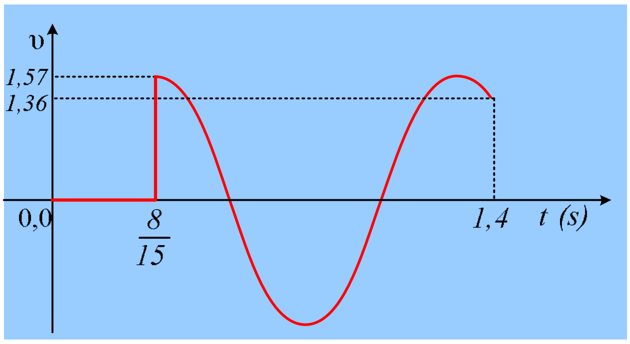
Επιστρέφουμε στην εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Λ:

$$\upsilon_\Lambda = \frac{\pi}{2}\cdot \sigma\upsilon\nu\left(2{,}5\pi \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right) \text{ με } t \geq 8/15\text{s}.$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης, σχεδιάζεται αν λάβουμε υπόψη μας, ότι:

- για t=$\frac{8}{15}$ s βρίσκουμε ότι υ= $\frac{\pi}{2}$ =1,57m/s,
- τη στιγμή t_2=1,4s η ταχύτητα έχει τιμή υ_2=1,36m/s,
- πρόκειται για μια συνημιτονοειδή συνάρτηση, με περίοδο T=0,8s, οπότε το χρονικό διάστημα από $\frac{8}{15}$ s μέχρι 1,4s, είναι λίγο μεγαλύτερο από μια περίοδο.

Με βάση όλα αυτά σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση, παίρνοντας:



dmargaris@gmail.com