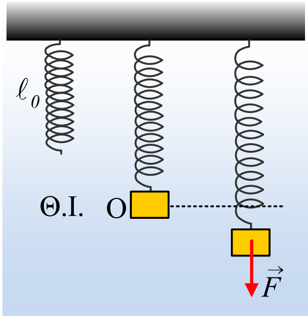
Μετά την άσκηση μεταβλητής δύναμης.



Ένα σώμα ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200N/m, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή ασκούμε στο σώμα, μια κατακόρυφη μεταβλητή δύναμη $\vec{F}$, με φορά προς τα κάτω, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση F=400y+20 (S.I.), όπου y η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του. Η δύναμη ασκείται στο σώμα, μέχρι αυτό να μετατοπισθεί κατά y_1=0,1m, φτάνοντας σε σημείο Ρ, οπότε η δύναμη καταργείται και το σώμα μένει ελεύθερο να εκτελέσει μια απλή αρμονική ταλάντωση, με σταθερά επαναφοράς D=k. Θεωρώντας την προς τα κάτω κατεύθυνση ως θετική και t=0 τη στιγμή που σταματά η εξάσκηση της δύναμης F, στη θέση Ρ, ενώ g=10m/s^2, ζητούνται:

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια της ταλάντωσης, καθώς και το πλάτος ταλάντωσης.

ii) Η δυναμική και η κινητική ενέργεια του σώματος, τη στιγμή που το σώμα περνά από το σημείο Ρ, κινούμενο προς τα πάνω, για πρώτη φορά.

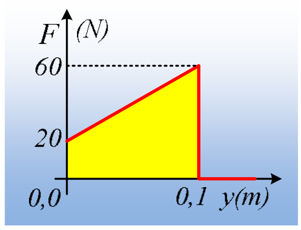
iii) Αν το σώμα επανέρχεται στο σημείο Ρ, κινούμενο προς τα πάνω (για πρώτη φορά), τη χρονική στιγμή t_1=π/15 (s), να υπολογιστούν:

α) Η μάζα του σώματος

β) Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_1.

iv) Να υπολογιστούν η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου καθώς και οι ρυθμοί μεταβολής τους, τη χρονική στιγμή t_2=π/10 (s).

Απάντηση:



i) Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F, κάνουμε τη γραφική παράσταση F-y, όπως στο διπλανό σχήμα. Το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της F.

$$W = \frac{20+60}{2}0,1J = 4J$$

Αλλά αρχικά το σώμα ηρεμούσε στη θέση ισορροπίας του, οπότε το παραπάνω έργο μετράει την ενέργεια που δίνεται στο σώμα, ώστε να εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του και να εκτελέσει μια απλή αρμονική ταλάντωση. Οπότε το έργο αυτό είναι ίσο και με την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = 4J$$

Από την παραπάνω σχέση, Λύνοντας ως προς Α, έχουμε για το πλάτος:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{D}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{200}}m = 0,2m$$

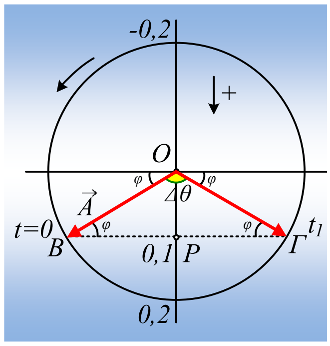
ii) Το σώμα, κινείται αρχικά προς τα κάτω, φτάνει σε απομάκρυνση y΄=Α=0,2m και επιστρέφει κινούμενο προς τα πάνω, φτάνοντας τη στιγμή t_1 στο σημείο Ρ. Στη θέση αυτή έχει:

$$U = \frac{1}{2}Dy_1^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 0,1^2 J = 1J$$

Αλλά τότε από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:

$$K + U = E \to K = E - U = 4J - 1J = 3J$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ο κύκλος αναφοράς της ταλάντωσης (όταν έχουμε ένα διάνυσμα, μήκους Α, που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τότε η προβολή του στην κατακόρυφη διεύθυνση ικανοποιεί την εξίσωση y=Α·ημ(ωt+$φ_0$)). Τη στιγμή t=0, το σώμα βρίσκεται στη θέση Ρ, με απομάκρυνση y_1=0,1m, κινούμενο προς τα κάτω, Συνεπώς το περιστρεφόμενο διάνυσμα σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ=30° (αριστερά στο σχήμα), αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΡΟ η κάθετη ΟΡ, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Αλλά 30° είναι επίσης και οι υπόλοιπες γωνίες που έχουν σημειωθεί ως φ. Το σώμα θα είναι ξανά στη θέση Ρ, όταν το περιστρεφόμενο διάνυσμα φτάσει στο Γ, έχοντας διανύσει γωνία $Δθ=π-2φ= \pi - 2\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ σε χρόνο Δt-t_1-t_0=t_1, συνεπώς:



$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi/3}{\pi/15} rad/s = 10 rad/s$$

α) Γνωρίζοντας τώρα τη γωνιακή συχνότητα, έχουμε:

$$D = m\cdot\omega^2 \to m = \frac{D}{\omega^2} = \frac{k}{\omega^2} = \frac{200}{10^2} kg = 2kg$$

β) Από την κινητική ενέργεια το σώματος στη θέση Ρ, παίρνουμε:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \to \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{2}} m/s = \sqrt{3} m/s$$

Βέβαια την παραπάνω στιγμή το σώμα κινείται προς τα πάνω πλησιάζοντας στην θέση ισορροπίας του, συνεπώς $\upsilon_1 = -\sqrt{3} m/s$

iv) Με βάση τις ιδέες του προηγούμενου ερωτήματος, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος, από τη θέση ισορροπίας του Ο, θα είναι:

$$y = A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \to y = 0,2\cdot\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

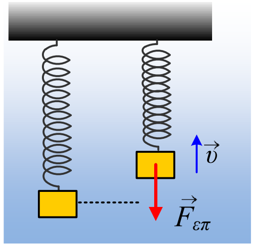
Οπότε τη στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση:

$$y_2 = 0,2\cdot\eta\mu\left(10t_2 + \frac{\pi}{6}\right) = 0,2\cdot\eta\mu\left(10\cdot\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{6}\right) = -0,2\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0,1m$$

Βρίσκεται δηλαδή πάνω από τη θέση ισορροπίας του σε συμμετρική θέση ως προς το σημείο Ρ, έχοντας δυναμική ενέργεια:

$$U_2 = \frac{1}{2}Dy_2^2 = \frac{1}{2}200\cdot(-0,1)^2\ J = 1J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της θα είναι:



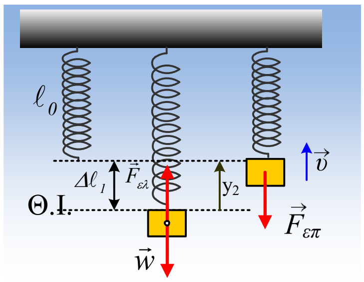
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|dy|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = -|Dy_2|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o = |Dy_2|\cdot|\upsilon_2|$$

Όμως και στη θέση αυτή, από ενέργεια ταλάντωσης, έχουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι ίση με 3J, οπότε θα έχουμε και:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \to |\upsilon_2| = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{2}}m/s = \sqrt{3}m/s \quad \text{και}$$

$$\frac{dU}{dt} = |Dy_2|\cdot|\upsilon_2| = 200\cdot 0,1\cdot\sqrt{3}J/s = 20\sqrt{3}J/s.$$

Ερχόμαστε τώρα στο ελατήριο. Στη θέση ισορροπίας Ο, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell_1$, όπου:



$$\Sigma F=0 \to F_{\varepsilon\lambda}=mg \to k\Delta\ell_1 = mg \to$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} = \frac{2\cdot 10}{200}m = 0,1m$$

Αλλά τότε τη στιγμή t_2 το σώμα βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, όπου $\Delta\ell = 0$, οπότε:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = 0$$

Ενώ και:

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\lambda}}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\lambda}|\cdot|dy|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |k\cdot(\Delta\ell)|\cdot|\upsilon_2|\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o = 0$$

dmargaris@gmail.com