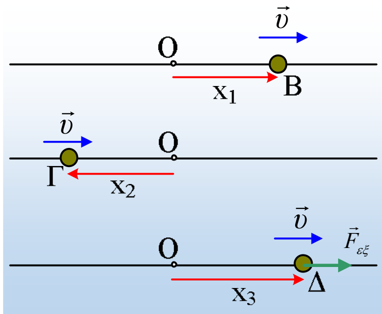
Ενέργειες και ρυθμοί μεταβολής σε ταλαντώσεις



Μια σφαίρα μάζας m=2kg εκτελεί μια απλή αρμονική ταλάντωση, με ω_1=10rad/s και κάποια στιγμή περνά από μια θέση Β με απομάκρυνση x_1=0,4m έχοντας ταχύτητα υ=2m/s, όπως στο πρώτο από τα διπλανά σχήματα.

i) Να υπολογιστούν για τη θέση αυτή:

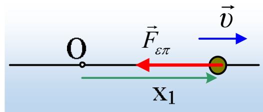
α) Η επιτάχυνση, η κινητική, η δυναμική ενέργεια και η ενέργεια ταλάντωσης.

β) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής, της δυναμικής ενέργειας και της ενέργειας ταλάντωσης.

ii) Η παραπάνω σφαίρα ταλαντώνεται στο ίδιο περιβάλλον, αλλά τώρα δέχεται και δύναμη απόσβεσης της μορφής F=-0,2υ (μονάδες στο S.I.), με αποτέλεσμα να ταλαντώνεται με ω_2=9rad/s. Αν κάποια στιγμή περνά από τη θέση Γ (μεσαίο σχήμα) όπου x_2=-0,4m, με ταχύτητα υ=2m/s, ποιες θα ήταν οι αντίστοιχες απαντήσεις στα δυο προηγούμενα υποερωτήματα;

iii) Αν τώρα στη σφαίρα ασκηθεί επιπλέον και μια περιοδική εξωτερική δύναμη της μορφής $F_{εξ}=F_0$συν(9,92t) και κάποια στιγμή περνά από τη θέση Δ (κάτω σχήμα) όπου x_3=0,5m, με ταχύτητα υ=2m/s, ενώ το μέτρο της εξωτερικής δύναμης, τη στιγμή αυτή, είναι ίσο με 2Ν, ποιες θα ήταν οι αντίστοιχες απαντήσεις στα δυο προηγούμενα υποερωτήματα;

Απάντηση:



i) Η σφαίρα ταλαντώνεται με σταθερά επαναφοράς:

$$D = m\omega_1^2 = 2\cdot 10^2\, N/m = 200 N/m$$

α) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F = ma_1 \rightarrow -Dx = ma_1 \rightarrow a_1 = -\omega^2 x = -10^2\cdot 0{,}4 m/s^2 = -40 m/s^2.$$

Στη θέση αυτή έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J = 4J$$

$$U_1 = \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0{,}4^2 J = 16J$$

Τότε η ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας είναι:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 4J + 16J = 20J$$

β) Για τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής των ενεργειών έχουμε:

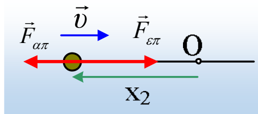
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{|\Sigma F|\cdot|dx|\cdot συνα}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot συνα = Dx_1\cdot\upsilon\cdot(-1) = -Dx_1\cdot\upsilon$$

$$dK/dt = -200\cdot 0{,}4\cdot 2 J/s = -160 J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = +Dx_1\cdot\upsilon = 200\cdot 0,4\cdot 2J/s = 160J/s$$

$$E = K + U \rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -160J/s + 160J/s = 0$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στη θέση Γ, στη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης.



α) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F = m\alpha_2 \rightarrow -Dx - b\upsilon = ma_2 \rightarrow$$

$$a_2 = \frac{-Dx - b\upsilon}{m} = -\frac{-200\cdot(-0,4) - 0,2\cdot 2}{2}m/s^2 = 39,8m/s^2.$$

Στη θέση αυτή έχουμε:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}2\cdot 2^2 J = 4J$$

$$U_2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 = \frac{1}{2}200\cdot 0,4^2 J = 16J$$

Τότε η ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας, τη στιγμή αυτή, είναι:

$$E_2 = K_2 + U_2 = 4J + 16J = 20J$$

β) Για τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής των ενεργειών, εφαρμόζοντας τις σχέσεις που αποδείξαμε παραπάνω, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha \rightarrow$$

Όπου $|\Sigma F|=|F_{\varepsilon\pi}|-|F_{\alpha\pi}|=200\cdot 0,4N-0,2\cdot 2N=79,6N$, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = |\Sigma F|\cdot|\upsilon| = 79,6\cdot 2J/s = 159,2J/s.$$

$$\frac{dU}{dt} = -|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = -|Dx_1|\cdot\upsilon = -200\cdot 0,4\cdot 2J/s = -160J/s$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \frac{dK_2}{dt} + \frac{dU_2}{dt} = +159,2J/s - 160J/s = -0,8J/s$$

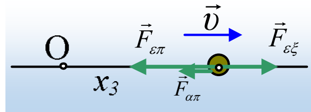
Σχόλια:

1) Θα παρατηρήσατε ότι η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ω_2=9rad/s δεν μας χρειάστηκε, αφού δεν καθορίζει σε καμιά περίπτωση κάποια μορφή ενέργειας.

2) Ο τελευταίος ρυθμός $\frac{dE_2}{dt}$ δεν εκφράζει τίποτα άλλο, παρά το ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια ταλάντωσης μετατρέπεται σε θερμική, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης, αφού:

$$P_{F\alpha\pi}=|F_{\alpha\pi}|\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu 180°=-b\upsilon\cdot\upsilon=-b\upsilon^2=-\ 0,2\cdot 2^2 W=-0,8W.$$

iii) Τώρα έχουμε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, όπου οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, στη θέση Δ, φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



α) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F=m\alpha_3 \rightarrow\ F_{\varepsilon\xi}-Dx-b\upsilon=m\alpha_3 \rightarrow$$

$$\alpha_3=\frac{F_{\varepsilon\xi}-Dx-b\upsilon}{m}=\frac{2-200\cdot 0{,}5-0{,}2\cdot 2}{2}\ m/s^2=-49{,}2m/s^2.$$

Στη θέση αυτή έχουμε:

$$K_3=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}2\cdot 2^2\,J=4J$$

$$U_3=\frac{1}{2}Dx_3^2=\frac{1}{2}200\cdot 0{,}5^2\,J=25J$$

Τότε η ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας, τη στιγμή αυτή, είναι:

$$E_3=K_3+U_3=4J+25J=29J$$

β) Για τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής των ενεργειών, με τον ίδιο, όπως παραπάνω τρόπο έχουμε:

$$\frac{dK}{dt}=|\Sigma F|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha \rightarrow$$

Όπου $|\Sigma F|=|F_{\varepsilon\pi}|+|F_{\alpha\pi}|-F_{\varepsilon\xi}=200\cdot 0{,}5N+0{,}2\cdot 2N-2N=98{,}4\ N$, οπότε:

$$\frac{dK}{dt}=-|\Sigma F|\cdot|\upsilon|=-98{,}4\cdot 2J/s=-196{,}8J/s.$$

$$\frac{dU}{dt}=-|F_{\varepsilon\pi}|\cdot|\upsilon|\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=|Dx_3|\cdot\upsilon=200\cdot 0{,}5\cdot 2J/s=200J/s$$

$$\frac{dE_3}{dt}=\frac{dK_3}{dt}+\frac{dU_3}{dt}=-196{,}8/s+200J/s=3{,}2J/s$$

Σχόλια:

1) Και στην περίπτωση αυτή δεν μας χρειάστηκε η γωνιακή συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, αφού η δυναμική ενέργεια δεν καθορίζεται από την ω_3, αλλά συνδέεται με τη δύναμη επαναφοράς και όχι την εξωτερική δύναμη.

2) Τι συμβαίνει με τις ενέργειες στη θέση Δ; Βρήκαμε ότι η ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται με ρυθμό $\frac{dE_3}{dt}=3{,}2/s$. Από πού προέρχεται η ενέργεια αυτή;

Η εξωτερική δύναμη μεταφέρει ενέργεια στο σώμα με ρυθμό, ίσο με την ισχύ της δύναμης:

$$P_{F_{\varepsilon\xi}}=F_{\varepsilon\xi}\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=2\cdot 2W=4W$$

Ενώ παράλληλα η δύναμη απόσβεσης αφαιρεί ενέργεια, την οποία μετατρέπει σε θερμική με ρυθμό, ίσο με την αντίστοιχη ισχύ:

$$P_{F_{\alpha\pi}} = |F_{\alpha\pi}| \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -|0{,}2 \cdot \upsilon| \cdot \upsilon = -0{,}8W$$

Δηλαδή από τα 4J/s που μεταφέρονται στη σφαίρα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης, τα 0,8J/s μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια, ενώ τα υπόλοιπα 3,2J/s, αυξάνουν την ενέργεια ταλάντωσης.

dmargaris@gmail.com