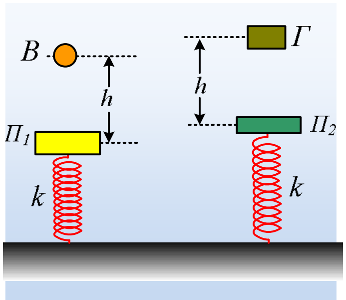
Δυο κρούσεις και στη συνέχεια δυο ΑΑΤ



Στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί στο έδαφος, ηρεμεί μια πλάκα $Π_1$ μάζας m_1=3m (αριστερό σχήμα). Από ορισμένο ύψος h, πάνω από την πλάκα αφήνεται μια σφαίρα Β μάζας m_2=m να πέσει και να συγκρουσθεί με την πλάκα κεντρικά και ελαστικά. Η σφαίρα Β απομακρύνεται μετά την κρούση, ενώ η πλάκα $Π_1$ εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο $Τ_1$ και πλάτος $Α_1$.

Στο δεξιό σχήμα, η πλάκα $Π_2$ έχει μάζα m_3=m, το ελατήριο την ίδια σταθερά k και από το ίδιο ύψος h αφήνεται ένα σώμα Γ, μάζας m_4=2m να πέσει και να συγκρουσθεί πλαστικά με την πλάκα. Μετά την κρούση ακολουθεί μια κατακόρυφη ΑΑΤ του συσσωματώματος με περίοδο $Τ_2$ και πλάτος $Α_2$.

i) Για τις δύο παραπάνω περιόδους ισχύει:

α) $Τ_1 < Τ_2$, β) $Τ_1 = Τ_2$, γ) $Τ_1 > Τ_2$.

ii) Για τα αντίστοιχα πλάτη ταλάντωσης ισχύει:

α) $Α_1 < Α_2$, β) $Α_1 = Α_2$, γ) $Α_1 > Α_2$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:

Και τα δυο σώματα Β και Γ, φτάνουν στην πλάκα με την ίδια ταχύτητα, αφού πέφτουν από το ίδιο ύψος, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε, είτε με τη βοήθεια της ελεύθερης πτώσης είτε με εφαρμογή της ΑΔΜΕ: $\left(\upsilon = \sqrt{2gh}\right)$.

Μετά την ελαστική κρούση της σφαίρας Β με την πλάκα, αυτή αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon_{\pi 1} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon = \frac{2m}{3m+m}\upsilon = \frac{1}{2}\upsilon$$

Εξάλλου, μετά την πλαστική κρούση του σώματος Γ με την πλάκα $Π_2$, το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα $υ_2$ η οποία προκύπτει με εφαρμογή της ΑΔΟ:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m_4\upsilon = (m_3 + m_4)\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{2m}{2m+m}\upsilon = \frac{2}{3}\upsilon$$

i) Η πλάκα $Π_1$ μετά την ελαστική κρούση εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο $Τ_1$, όπου:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}} \quad (1)$$

Αντίστοιχα το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_\sigma}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+2m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}} \quad (2)$$

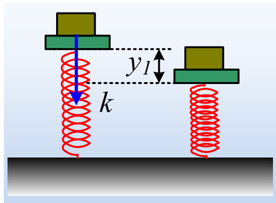
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $T_1 = T_2$. Σωστό το β).

ii) Η ελαστική κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας της πλάκας Π_1, οπότε η κινητική ενέργεια που αποκτά η πλάκα, θα είναι ίση και με την ενέργεια ταλάντωσης, οπότε:

$$K_{max} = E_\tau \rightarrow \frac{1}{2}3m\cdot\upsilon_{\pi 1}^2 = \frac{1}{2}k\cdot A_1^2$$

$$\frac{1}{2}k\cdot A_1^2 = \frac{3}{8}m\cdot\upsilon^2 \,(3)$$

Αντίθετα η πλαστική κρούση έγινε σε θέση η οποία απέχει κατά y_1 από τη (νέα) θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα ακολουθήσει. Αλλά τότε από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:



$$K_1 + U_1 = E_{\tau 2} \rightarrow \frac{1}{2}3m\cdot\upsilon_{\pi 2}^2 + \frac{1}{2}k\cdot y_1^2 = \frac{1}{2}k\cdot A_2^2$$

$$\frac{1}{2}k\cdot A_2^2 = \frac{2}{3}m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\cdot y_1^2 \quad (4)$$

Αλλά αν συγκρίνουμε τις (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{2}{3}m\cdot\upsilon^2 > \frac{3}{8}m\cdot\upsilon^2 \text{ οπότε:}$$

$$\frac{2}{3}m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\cdot y_1^2 > \frac{3}{8}m\cdot\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}k\cdot A_2^2 > \frac{1}{2}k\cdot A_1^2 \rightarrow A_2 > A_1$$

Σωστό το α).

dmargaris@gmail.com