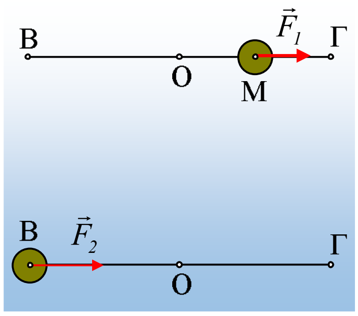
Ας ενισχύσουμε την ταλάντωση



Μια σφαίρα μάζας m=2kg εκτελεί μια απλή αρμονική ταλάντωση, μεταξύ των θέσεων Β και Γ, γύρω από τη θέση ισορροπίας Ο, όπως στο σχήμα, με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$x=0{,}2\cdot ημ(2πt) \quad \text{μονάδες στο S.I.}$$

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης, καθώς και η ταχύτητα της σφαίρας, τη στιγμή t_1 που περνά από το μέσον Μ της ΟΓ, κινούμενη προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση).

Τη στιγμή t_1 στη σφαίρα ασκείται μια σταθερή δύναμη F_1 μέτρου F_1=21Ν, με κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπως στο πάνω σχήμα, μέχρι να φτάσει η σφαίρα στη θέση Ν, έχοντας μετατοπισθεί κατά Δx=0,4m, οπότε η δύναμη παύει να ασκείται. Να βρεθούν:

ii) Η επιτάχυνση της σφαίρας μόλις ασκηθεί η δύναμη F_1.

iii) Η τελική ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας, καθώς και η ταχύτητά της τη στιγμή που παύει να ασκείται πάνω της η δύναμη F_1.

iv) Αν δεν ασκείτο στη σφαίρα η παραπάνω δύναμη F_1, αλλά μια άλλη δύναμη F_2, με μέτρο F_2=8Ν, τη στιγμή που βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση της Β (κάτω σχήμα) και για χρονικό διάστημα Δt=0,5s, ποια θα ήταν τελικά η ενέργεια ταλάντωσης, μετά την κατάργησή της;

Δίνεται $π^2≈10$

Απάντηση:

i) Η σφαίρα ταλαντώνεται με σταθερά επαναφοράς:

$$D=mω^2 = 2\cdot(2π)^2 N/m=80N/m$$

Οπότε η ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας είναι:

$$E=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}80\cdot 0{,}2^2 J=1{,}6J$$

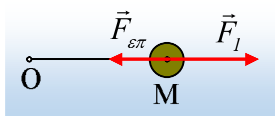
Τη στιγμή t_1 η ενέργεια ταλάντωσης εμφανίζεται ως κινητική και δυναμική, οπότε:

$$K+U=E \to \frac{1}{2}mυ_1^2+\frac{1}{2}Dx_1^2=\frac{1}{2}DA^2 \to$$

$$|υ_1|=\sqrt{\frac{D}{m}\left(A^2-x_1^2\right)}=ω\sqrt{A^2-x_1^2}=2π\sqrt{0{,}2^2-0{,}1^2}\,m/s=0{,}2π\sqrt{3}\,m/s\approx 1{,}1m/s$$

Αλλά αφού η σφαίρα κινείται προς την θετική κατεύθυνση $υ_1$=1,1m/s.

ii) Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Νεύτωνα, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη F_1, παίρνουμε:



$$ΣF=mα_1 \to F_1+F_{επ}=m\cdot α_1 \to F_1-Dx_1=m\cdot α_1 \to$$

$$\alpha_1 = \frac{F_1 - Dx_1}{m} = \frac{21 - 80 \cdot 0,1}{2} m/s^2 = 6,5 m/s^2.$$

Προέκυψε θετική τιμή επιτάχυνσης, πράγμα που σημαίνει ότι έχει φορά προς τα δεξιά (…και η σφαίρα επιταχύνεται)

iii) Μέσω του έργου της δύναμης F_1 μεταφέρεται ενέργεια στη σφαίρα ίση με:

$$W_{F1}=F_1 \cdot \Delta x=21 \cdot 0,4J=8,4J$$

Αλλά τότε η (νέα) ενέργεια ταλάντωσης θα είναι ίση:

$$E_1=E+W_{F1}=1,6J+8,4J=10J$$

Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F_1 το σώμα εκτελεί μια νέα ταλάντωση, ευρισκόμενο στη θέση:

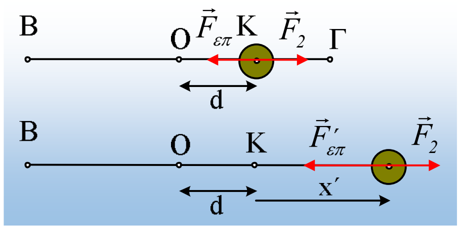
$$x_2=x_1+\Delta x=0,1m+0,4m=0,5m.$$

Εξάλλου η (νέα) ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση:

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 \rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{80}} m = 0,5m$$

Παρατηρούμε ότι η θέση x_2=0,5m είναι ακραία θέση για την νέα ταλάντωση που θα ακολουθήσει, οπότε η ταχύτητα στη θέση αυτή θα είναι μηδενική (υ_2=0).

iv) Αν στη σφαίρα ασκηθεί η σταθερή δύναμη F_2, αυτή θα εκτελέσει μια αρμονική ταλάντωση, γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας Κ, για την οποία θα ισχύει:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F_2+F_{\varepsilon\pi}=0 \rightarrow F_2-Dd=0 \rightarrow$$

$$d = \frac{F_2}{D} = \frac{8}{80} m = 0,1m$$

Έστω τώρα η σφαίρα σε μια τυχαία θέση η οποία απέχει κατά x΄ από τη θέση ισορροπίας Κ (κάτω σχήμα).

$$\Sigma F=F_2-D(d+x')=Dd-Dd-Dx'=-Dx'$$

Η περίοδος της ταλάντωσης αυτής είναι ίση:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{80}} s = 1s$$

Αλλά τότε σε χρόνο t_2=0,5s= ½ Τ΄, η σφαίρα ξεκινώντας από την αριστερή ακραία θέση, θα έχει φτάσει στη δεξιά ακραία θέση, διανύοντας απόσταση:

$$s=2A'=2(BK)=2(0,2+0,1)m=0,6m$$

Κατά την μετατόπιση αυτή η δύναμη F_2 παράγει έργο:

$$W_2=F_2 \cdot s=8N \cdot 0,6m=4,8J.$$

Αλλά τότε η ενέργεια ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει η σφαίρα, μετά την κατάργηση της δύναμης

F_2, μια νέα ΑΑΤ, γύρω από το Ο, θα έχει ενέργεια:

$$E_2 = E + W_2 = 1{,}6J + 4{,}8J = 6{,}4J$$

Σχόλια:

1) Μόλις σταματήσει η δράση τη δύναμης F_2 η σφαίρα βρίσκεται σε σημείο Δ (δεξιά ακραία θέση) που απέχει κατά Α΄ = 0,3m από το σημείο Κ, άρα απέχει κατά A_2=d+A΄=0,1m+0,3m=0,4m από τη θέση ι-σορροπίας Ο.

   Αλλά τότε η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι:

$$E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 0{,}4^2 J = 6{,}4J$$

2) Στο ερώτημα ii) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ΘΜΚΕ για να βρούμε την τελική ταχύτητα της σφαίρας, μετά την κατάργηση της δύναμης F_1:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F1} + W_{Fεπ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m υ_τ^2 - \frac{1}{2} m υ_1^2 = F_1 Δx + \left(\frac{1}{2} D x_1^2 - \frac{1}{2} D x_2^2 \right) \rightarrow$$

$υ_τ$=0 οπότε και A_1=0,5m και:

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 0{,}5^2 J = 10J$$

dmargaris@gmail.com