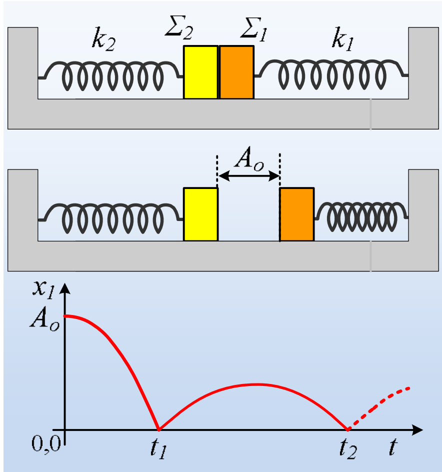
Οι ταλαντώσεις και ένα διάγραμμα



Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ του διπλανού σχήματος, είναι δεμένα στα ά-κρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων και ισορροπούν σε επαφή, πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο.

i) Αν το πρώτο ελατήριο σταθεράς k_1 έχει το φυσικό μήκος του, να αποδείξτε ότι και το δεύτερο ελατήριο k_2, έχει επίσης το φυσικό του μήκος.

Εκτρέπουμε το σώμα $Σ_1$ προς τα δεξιά συμπιέζοντας το ελατήριο κατά A_0 και το αφήνουμε να ταλαντωθεί. Στο κάτω σχήμα δίνεται η απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου τις στιγμές t_1 και t_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα $Σ_2$.

ii) Για τις παραπάνω χρονικές στιγμές ισχύει:

α) $t_2 < 3t_1$, β) $t_2 = 3t_1$, γ) $t_2 > 3t_1$.

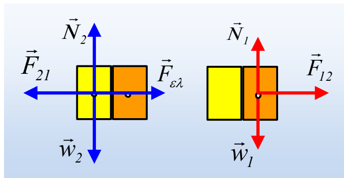
iii) Για τις μάζες m_1 και m_2 των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αντίστοιχα ισχύει:

α) $m_1 < m_2$, β) $m_1 = m_2$, γ) $m_1 > m_2$.

iv) Αν $m_2=2m_1$ να υπολογίσετε τα πλάτη ταλάντωσης των δύο σωμάτων, μετά την πρώτη μεταξύ τους κρούση, σε συνάρτηση με το αρχικό πλάτος A_0 του $Σ_1$.

Δίνεται ότι οι κινήσεις των σωμάτων μεταξύ των δύο κρούσεων είναι τμήματα ΑΑΤ, ενώ ούτε και το σώμα $Σ_2$ έχει ολοκληρώσει μια πλήρη ταλάντωση μεταξύ πρώτης και δεύτερης κρούσης.

Απάντηση:



i) Έστω ότι το δεύτερο ελατήριο σταθεράς k_2 δεν έχει το φυσικό μήκος του με αποτέλεσμα να ασκεί την δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ στο σώμα $Σ_2$. Τότε για να ισορροπεί το $Σ_2$, θα πρέπει να δεχτεί μια αντίθετη οριζόντια δύναμη $\vec{F}_{21}$ από στο $Σ_1$ (δεν υπάρχει κάποιο άλλο σώμα που να μπορεί να α-σκήσει τέτοια δύναμη). Η αντίδρασή της, η $\vec{F}_{12}$ θα ασκείται τώρα στο σώμα $Σ_1$, χωρίς να μπορεί να ε-ξουδετερωθεί από κάποια άλλη δύναμη, αφού το πρώτο ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Αλλά τότε το $Σ_1$ δεν θα ισορροπεί, πράγμα άτοπο.

Άρα και το δεύτερο ελατήριο θα έχει το φυσικό μήκος του.

ii) Με βάση το διάγραμμα $t_1= ¼\ T_1= ¼ \cdot 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}}$, αφού το σώμα μετακινείται από την θέση πλάτους, στη θέση ισορροπίας. Αλλά και μετά την πρώτη κρούση το $Σ_1$ θα εκτελέσει ταλάντωση με την ίδια περίοδο T_1 (δεν άλλαξε ούτε η μάζα ούτε η σταθερά του ελατηρίου), οπότε θα εκτελέσει μισή ταλάντωση μέχρι την $2^η$ κρούση, αφού και αυτή πραγματοποιείται στη θέση ισορροπίας του, άρα:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{2}T_1 = 3 \cdot \frac{1}{4}T_1 = 3t_1$$

Σωστό το β).

iii) Το σώμα $Σ_1$ εξετράπη προς τα δεξιά κατά $Α_0$ και με βάση το διάγραμμα που μας δόθηκε, η αρχική απομάκρυνση θεωρήθηκε θετική. Αλλά τότε και μετά την πρώτη κρούση, ξανά θετική απομάκρυνση έχει, πράγμα που σημαίνει ότι με την κρούση άλλαξε φορά κίνησης. Αυτό συμβαίνει μόνο αν το $Σ_1$ έχει μικρότερη μάζα από το $Σ_2$. Πράγματι για τις ταχύτητες πριν και μετά την ελαστική κρούση έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Οπότε αν $m_1<m_2$ η ταχύτητα $υ_1΄$ έχει αντίθετο πρόσημο σε σχέση με την ταχύτητα $υ_1$ πριν την κρούση.

Σωστό το α).

iv) Αν $m_2=2m_1$, θα έχουμε για τις ταχύτητες μετά την κρούση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1}\upsilon_1 = -\frac{1}{3}\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{3m_1}\upsilon_1 = \frac{2}{3}\upsilon_1$$

Όμως η πρώτη κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας και για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ισχύει:

$$\upsilon_1 = A_0 \cdot \omega$$

Αλλά και οι δυο νέες ταλαντώσεις που θα πραγματοποιηθούν μετά την κρούση, τα σώματα ξεκινούν από τις θέσεις ισορροπίας τους, οπότε οι ταχύτητες $υ_1΄$και $υ_2΄$ είναι επίσης μέγιστες.

Εξάλλου από το διάγραμμα που μας δόθηκε βλέπουμε ότι και η δεύτερη κρούση έγινε στη θέση x=0 μετά από χρονικό διάστημα $Δt= ½\ T_1$. Αλλά και το δεύτερο σώμα θα έχει την ίδια στιγμή επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του, οπότε θα ισχύει επίσης και $Δt= ½\ T_2$. Οπότε θα ισχύει $T_1=T_2$, οι δυο ταλαντώσεις δηλαδή θα έχουν την ίδια περίοδο, συνεπώς και την ίδια γωνιακή συχνότητα $ω_1=ω_2=ω$.

Με βάση αυτά, θα έχουμε:

$$|\upsilon_1'| = A_1\omega \rightarrow A_1 = \frac{|\upsilon_1'|}{\omega} = \frac{1}{3}\frac{\upsilon_1}{\omega} = \frac{1}{3}A_0 \text{ και}$$

$$|\upsilon_2'| = A_2\omega \rightarrow A_2 = \frac{|\upsilon_2'|}{\omega} = \frac{2}{3}\frac{\upsilon_1}{\omega} = \frac{2}{3}A_0$$

dmargaris@gmail.com