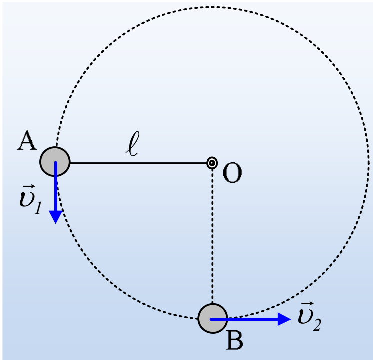
Μια κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο



Μια σφαίρα μάζας m=0,4kg κινείται σε κατακόρυφη κυκλική τροχιά κέντρου O, δεμένη στο άκρο νήματος μήκους l=1,4m. Σε μια στιγμή περνά από το σημείο A, έχοντας κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου υ_1=6m/s.

i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος στην παραπάνω θέση A.

ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια της σφαίρας στην θέση A και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας;

iii) Μετά από λίγο η σφαίρα περνά από τη θέση B, όπου το νήμα γίνεται κατακόρυφο. Για την θέση αυτή να βρεθούν:

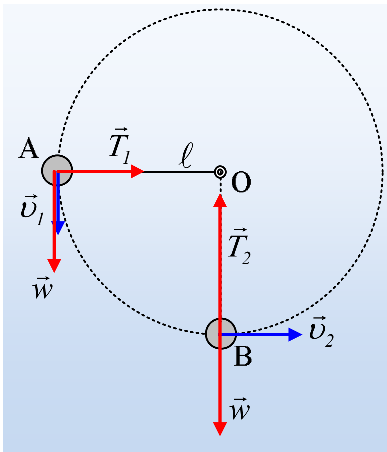
α) Η ταχύτητα της σφαίρας.

β) Η τάση του νήματος.

γ) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής της ενέργειας.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



Σε κάθε θέση η ταχύτητα της σφαίρας είναι εφαπτόμενη της κυκλικής τροχιάς, συνεπώς κάθετη στο νήμα. Έτσι στην θέση A το νήμα είναι οριζόντιο, ενώ στη θέση B η ταχύτητα είναι οριζόντια!

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα και στις δύο παραπάνω θέσεις.

i) Στη θέση A, η μόνη δύναμη κάθετη στην ταχύτητα, που «παίζει το ρόλο» της κεντρομόλου δύναμης, είναι η τάση T_1 του νήματος.

$$T_1 = m\frac{\upsilon_1^2}{R} = 0{,}4\frac{6^2}{1{,}4}N \approx 10{,}3N$$

ii) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας στη θέση A είναι ίση:

$$K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}0{,}4\cdot 6^2 J = 7{,}2J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, θα προκύψει με τη βοήθεια του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{w\cdot ds\cdot \sigma\upsilon\nu 0^o}{dt} + \frac{T_1\cdot ds\cdot \sigma\upsilon\nu 90^o}{dt} = \frac{w\cdot ds}{dt} = mg\cdot\upsilon_1$$

Ίση δηλαδή με την **ισχύ** του βάρους, αφού η τάση του νήματος δεν παράγει έργο, μιας και είναι κάθετη στην ταχύτητα (μετατόπιση). Οπότε:

$$\frac{dK_1}{dt} = mg \cdot \upsilon_1 = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 6\,J/s = 24\,J/s$$

iii) Μεταξύ των θέσεων Α και Β η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, μια συντηρητική δύναμη, μετατρέποντας τη δυναμική ενέργεια σε κινητική.

α) Οπότε θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια μηδενική στη θέση Β, εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων Α και Β, παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + mg\ell = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2g\ell} = \sqrt{6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1{,}4}\,m/s = 8\,m/s$$

β) Παίρνουμε ξανά την κεντρομόλο δύναμη, η οποία δεν είναι άλλη από τη συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση της ακτίνας (εδώ σε κατακόρυφη διεύθυνση…) και βρίσκουμε:

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_2^2}{R} \rightarrow T_2 - mg = m\frac{\upsilon_2^2}{R} \rightarrow$$

$$T_2 = mg + m\frac{\upsilon_2^2}{R} = 0{,}4 \cdot 10\,N + 0{,}4\frac{8^2}{1{,}4}\,N \approx 22{,}3\,N$$

γ) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας στη θέση Β είναι ίση:

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}0{,}4 \cdot 8^2\,J = 12{,}8\,J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, σύμφωνα με το ερώτημα ii) θα είναι μηδενικός:

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{w \cdot ds \cdot συν90^o}{dt} + \frac{T_2 \cdot ds \cdot συν90^o}{dt} = 0$$

Αφού η ισχύς και των δύο δυνάμεων είναι μηδενική, μιας και οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση (η διεύθυνση της ταχύτητας).

dmargaris@gmail.com