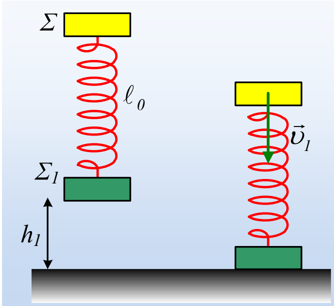
Μετά την πλαστική κρούση μια ααт.



Τα σώματα Σ και $Σ_1$ με μάζες m=4kg και m_1=2kg είναι δεμένα στα άκρα ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400N/m και συγκρατούνται όπως στο αριστερό σχήμα, με τον άξονα του ελατηρίου, που έχει το φυσικό μήκος του l_0=0,4m, κατακόρυφο. Στη θέση αυτή το $Σ_1$ απέχει κατά h_1=0,15m, από το έδαφος. Κάποια στιγμή, την οποία θεωρούμε ως t_0=0, αφήνουμε ταυτόχρονα τα σώματα, να πέσουν, οπότε μετά από λίγο το $Σ_1$ προσκολλάται στο έδαφος, χωρίς να αναπηδήσει.

i) Να βρεθεί η επιτάχυνση κάθε σώματος, καθώς και η χρονική στιγμή που το $Σ_1$ θα συγκρουσθεί με το έδαφος.

ii) Να αποδειχτεί ότι το σώμα Σ θα εκτελέσει ΑΑΤ, μετά την προσκόλληση του $Σ_1$ με το έδαφος.

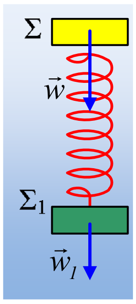
iii) Να υπολογιστεί το κλάσμα της αρχικής μηχανικής ενέργειας του συστήματος, το οποίο εμφανίζεται ως ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ. Για τον υπολογισμό της μηχανικής ενέργειας θεωρείστε το έδαφος ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

iv) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών θα μεταβάλλεται το μήκος του ελατηρίου, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης και να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.

v) Να βρείτε επίσης τη συνάρτηση h=h(t), του ύψους από το έδαφος του σώματος Σ, σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

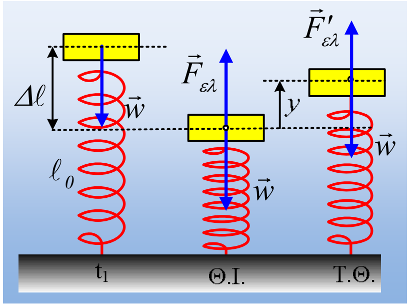


i) Μόλις αφεθούν τα δυο σώματα ελεύθερα, οι μόνες δυνάμεις που δέχονται είναι τα δυο βάρη, αφού το ελατήριο έχει αρχικά το φυσικό μήκος του. Αλλά τότε και τα δυο σώματα θα αποκτήσουν κατακόρυφη επιτάχυνση ίση με g, θα κινηθούν κάθε στιγμή με την ίδια ταχύτητα, με αποτέλεσμα και η απόσταση μεταξύ τους να παραμείνει σταθερή και ίση με l_0, οπότε σε όλη τη διάρκεια της πτώσης **ΔΕΝ** θα ασκηθεί δύναμη από το ελατήριο και η κίνησή τους θα είναι **ελεύθερη πτώση**. Αλλά τότε θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$y = ½\, g \cdot t^2 \quad \text{και} \quad \upsilon = g \cdot t$$

Από όπου βρίσκουμε:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \to t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,15}{10}} s = 0,1\sqrt{3} s \quad \text{και } \upsilon_1 = g \cdot t_1 = 10 \cdot 0,1\sqrt{3}\ m/s = \sqrt{3}\ m/s.$$



ii) Τη στιγμή της πλαστικής κρούσης του σώματος Σ_1 με το έδαφος, το σώμα Σ έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\sqrt{3}$ m/s, ενώ το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Αλλά τότε η κατάσταση είναι αυτή που δείχνει το διπλανό σχήμα, για τη στιγμή t_1.

Η θέση ισορροπίας βρίσκεται πιο κάτω, όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά Δl.

Για την Θ.Ι. ισχύει $\Sigma F=0$ *ή* $k{\cdot}\Delta l=mg \rightarrow$

$$\Delta\ell=\frac{mg}{k}=\frac{4\cdot 10}{400}M=0{,}1m$$

Αλλά τότε για την τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά y, από την θέση ισορροπίας, ισχύει:

$$\Sigma F=F_{\varepsilon\lambda}{}'-w=k(\Delta l-y)-mg=k{\cdot}\Delta l=k{\cdot}y-mg=-ky$$

Συνεπώς το σώμα Σ θα εκτελέσει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς D=k, γύρω από τη θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $\Delta\ell=0{,}1m$.

iii) Η αρχική ενέργεια του συστήματος (τη στιγμή που αφήνεται να πέσει) είναι:

$$E_M=U_\Sigma+U_{\Sigma 1}+U_{\varepsilon\lambda}=mg(h_1+\ell_0)+m_1gh_1+0\rightarrow$$

$$E_M=mg(h_1+\ell_0)+m_1gh_1=4\cdot 10\cdot(0{,}15+0{,}4)J+2\cdot 10\cdot 0{,}15J=25J$$

Αντίστοιχα η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, είναι η ενέργεια της στιγμής της προσκόλλησης του Σ_1, όπου και ξεκινά να εκτελεί ΑΑΤ:

$$E_T=K+U=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}ky_1^2$$

Όπου $y_1=\Delta l=0{,}1$m, οπότε:

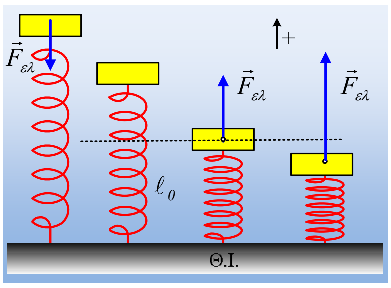
$$E_T=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}ky_1^2=\frac{1}{2}4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2J+\frac{1}{2}400\cdot 0{,}1^2J=6J+2J=8J$$

Οπότε το ζητούμενο κλάσμα είναι:

$$\frac{E_T}{E_M}=\frac{8J}{25J}=\frac{8}{25}$$

iv) Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ, το βρίσκουμε από την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E_T=\frac{1}{2}kA^2\rightarrow A=\sqrt{\frac{2E_T}{k}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8}{400}}m=0{,}2m$$



Αλλά τότε το μήκος του ελατηρίου θα παίρνει τιμές:

$$\ell_0-(A+y_1)\le\ell\le\ell_0+(A-y_1)\rightarrow$$

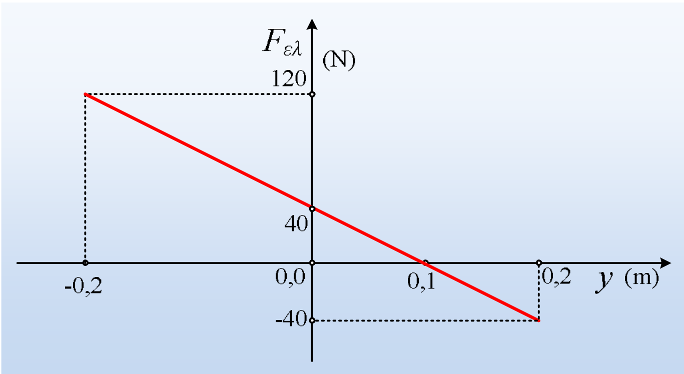
$$0{,}1m\le\ell\le 0{,}5m$$

Παίρνοντας τις δυνάμεις στην τυχαία θέση, με θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση, θα έχουμε:

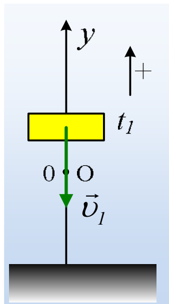
$$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda}{'} - w \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}{'} = -ky + mg = -400 \cdot y + 40 \quad (S.I.)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε, λίγο το διπλανό σχήμα, που έχει σχεδιαστεί η δύναμη του ελατηρίου, για να γίνει κατανοητή η φορά της, στις διάφορες θέσεις…

Με γραφική παράσταση, όπως στο σχήμα:



v) Μόλις αφεθεί το σώμα Σ να κινηθεί, η μετατόπισή του δίνεται από την εξίσωση:



$$\Delta h = -\tfrac{1}{2} g t^2 \rightarrow h = h_{\alpha\rho\chi} - \tfrac{1}{2} g t^2 = (h_1 + \ell_0) - \tfrac{1}{2} g t^2 \rightarrow$$

$$h = 0{,}55 - 5 \cdot t^2 \quad \text{(S.I.) με } 0 \le t \le 0{,}1\sqrt{3}\, s$$

Τη στιγμή t_1 αρχίζει να ταλαντώνεται απέχοντας κατά y_1=0,1m από τη θέση ισορροπίας του Ο, η οποία βρίσκεται σε ύψος $h_o = l_0 - y_1$=0,3m από το έδαφος.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση αυτή έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu(\omega t' + \varphi_0)$$

όπου A=0,2m, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{400}{4}} rad/s = 10 rad/s$, $t' = t - t_1$, ενώ θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση $t'=0$ ή $t=t_1$ και $y=y_1$=0,1m παίρνουμε:

$$0{,}1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\varphi_0 \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \tfrac{1}{2}$$

Οπότε αν θέλουμε να ισχύει $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, θα πρέπει $\varphi_0 = \pi/6$ ή $\varphi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

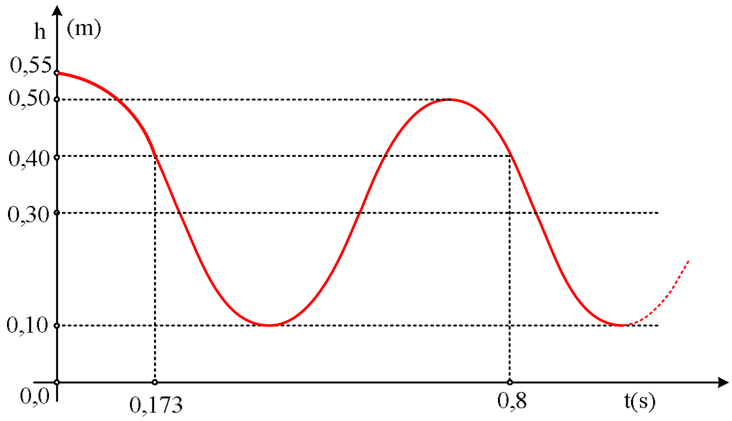
Η αντίστοιχη εξίσωση για την ταχύτητα είναι $\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t' + \varphi_0)$ και με αντικατάσταση του χρόνου ($t'=0$) παίρνουμε $\upsilon_1 = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0$, οπότε από τις δυο παραπάνω δυνατές λύσεις επιλέγουμε την $\varphi_0 = 5\pi/6$ και η εξίσωση της απομάκρυνσης γίνεται:

$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left[10\left(t - 0{,}1\sqrt{3}\right) + \frac{5\pi}{6}\right] = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left[10t + \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)\right] \quad \text{(S.I.)}$$

Αλλά τότε το ύψος από το έδαφος θα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h = h_o + y = 0{,}3 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\left[10t + \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)\right]$$

Λαμβάνοντας ακόμη υπόψη ότι η περίοδος είναι $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}2\pi\ s = 0{,}628s$ ενώ $t_1 = 0{,}1\sqrt{3}s$ ≈0,173s σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση, παίρνοντας το σχήμα:



Αξίζει να διευκρινισθεί ότι το πρώτο τμήμα της καμπύλης από 0-0,173s είναι τμήμα παραβολής, ενώ στη συνέχεια η μορφή της καμπύλης είναι αρμονική.

dmargaris@gmail.com