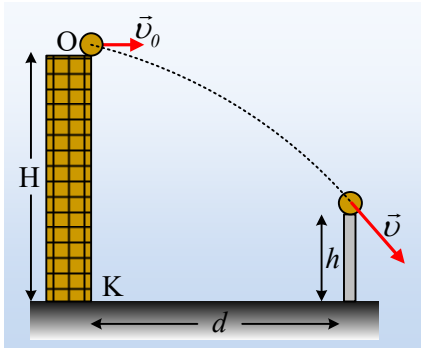


## Η μπάλα κτυπάει στην κορυφή του στύλου



Μια μπάλα εκτοξεύεται οριζόντια, από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας ύψους  $H=30\text{m}$ , με αρχική ταχύτητα  $v_0$  και κτυπάει στην κορυφή ενός κατακόρυφου στύλου που στηρίζεται στο έδαφος, σε οριζόντια απόσταση  $d=40\text{m}$  από την πολυκατοικία και ο οποίος έχει ύψος  $h=10\text{m}$ , με ταχύτητα  $v$ .

i) Παίρνοντας το σύστημα αξόνων  $x,y$  όπως στο διπλανό σχήμα (και με τον καθορισμένο προσανατολισμό):

α) Να γράψετε τις εξισώσεις

$x=x(t)$  και  $y=y(t)$  για τις θέσεις της μπάλας.

β) Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα εκτόξευσης  $v_0$ , καθώς και την γωνία που σχηματίζει η τελική ταχύτητα  $v$  με τον στύλο, ελάχιστα πριν τη στιγμή της κρούσης.

ii) Θα μπορούσαμε βέβαια να πάρουμε την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, με την ίδια αρχή  $O$  των δύο αξόνων. Πώς θα δουλεύατε, ώστε να απαντήσετε στα δύο παραπάνω υποερωτήματα;

iii) Ένας μαθητής, πήρε το σύστημα αξόνων  $(x,y)$  όπως στο διπλανό σχήμα, με αρχή το σημείο  $K$  του εδάφους και με τον προσανατολισμό που δείχνει το σχήμα. Σε τι απαντήσεις οδηγήθηκε και μέσω ποιου δρόμου, στα δύο παραπάνω υποερωτήματα;

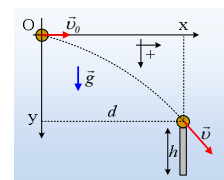
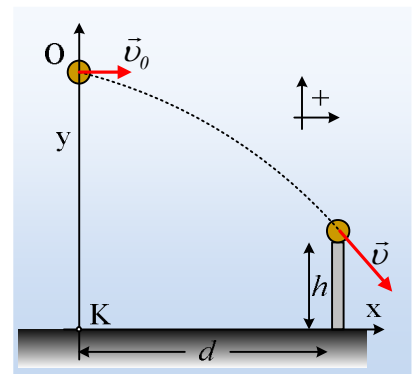
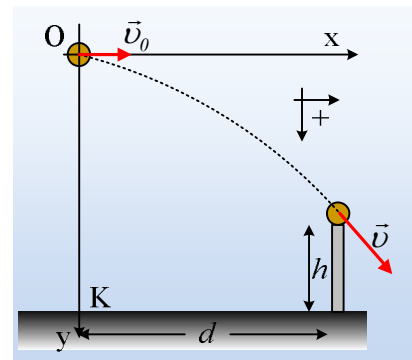
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g=10\text{m/s}^2$ , ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

### Απάντηση:

i) α) Η μπάλα έχει κατακόρυφη επιτάχυνση  $a_y=+g$ , οπότε θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια ευθύγραμμη ομαλή στον άξονα  $x$  και μια ελεύθερη πτώση στον άξονα  $y$  και ότι η εκτόξευση έγινε τη στιγμή  $t_0=0$ , θα έχουμε:

Άξονας $x$	Άξονας $y$
$v_x=v_0$ (1)	$v_y=a \cdot t=gt$ (3)
$x=v_0 \cdot t$ (2)	$y= \frac{1}{2} a_y \cdot t^2= \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (4)

β) Τη στιγμή που η μπάλα φτάνει στον στύλο  $y+h=H$  ή  $y=H-h=30\text{m}-10\text{m}=20\text{m}$ , οπότε από την (4) παίρνουμε:



$$y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}}s = 2s$$

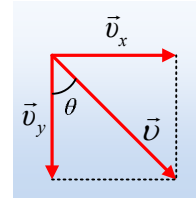
Οπότε από την (2) βρίσκουμε:

$$x = v_0t \rightarrow v_0 = \frac{x}{t} = \frac{d}{t} = \frac{40m}{2s} = 20m/s$$

Ενώ από την (3):

$$v_y = gt = 10 \cdot 2m/s = 20m/s.$$

Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα, το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο και η γωνία που σχηματίζει η τελική ταχύτητα με την κατακόρυφη διεύθυνση (με το στύλο) είναι  $\theta = 45^\circ$ .



ii) Αν η θετική φορά του άξονα y, ήταν προς τα πάνω, τότε η επιτάχυνση θα ήταν αρνητική, δηλαδή θα είχαμε  $a_y = -g = -10m/s^2$ .

α) Οι κινήσεις στους δυο άξονες προφανώς δεν άλλαξαν, απλά οι εξισώσεις θα είναι:

Άξονας x	Άξονας y
$v_x = v_0$ (1 <sup>α</sup> )	$v_y = a \cdot t = -gt$ (3 <sup>α</sup> )
$x = v_0 \cdot t$ (2 <sup>α</sup> )	$y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$ (4 <sup>α</sup> )

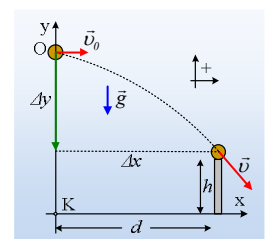
Όπου το (-) στις δυο τελευταίες εξισώσεις, απλά δείχνει ότι τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν φορά προς τα κάτω. Έτσι τη στιγμή που η μπάλα φτάνει στον στύλο η θέση της θα είναι  $y = -20m$  και η (4<sup>α</sup>) θα δώσει:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{-g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-20)}{-10}}s = 2s$$

Ενώ από κει και πέρα δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο απαντάμε στα υπόλοιπα ζητούμενα.

iii) Ο μαθητής που πήρε την αρχή των αξόνων στο σημείο K, όπως στο σχήμα, υποχρεώνεται να δουλέψει με μετατοπίσεις στον άξονα y, αφού το σώμα δεν ξεκινά από την αρχή ( $y=0$ ), αλλά από τη θέση  $y_0=H$ .

α) Οι αντίστοιχες εξισώσεις, θα είναι όπως στο ii) ερώτημα με μόνη διαφορά στην μετατόπιση:



Άξονας x	Άξονας y
$v_x = v_0$ (1 <sup>β</sup> )	$v_y = a \cdot t = -gt$ (3 <sup>β</sup> )
$x = v_0 \cdot t$ (2 <sup>β</sup> )	$\Delta y = \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \rightarrow y = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (4 <sup>β</sup> )

Τη στιγμή που η μπάλα φτάνει στο στύλο,  $y=h$  και από την (4β) παίρνουμε:

$$h=H-\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (30-10)}{10}}s = 2s$$

οπότε από την (2<sup>β</sup>) υπολογίζει ξανά  $v_0=20\text{m/s}$  και από την (3<sup>β</sup>)  $v_y=-20\text{m/s}$ , οπότε ξανά έχουμε το ίδιο παραλληλόγραμμο ταχυτήτων και η γωνία προκύπτει  $\theta=45^\circ$ .

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)