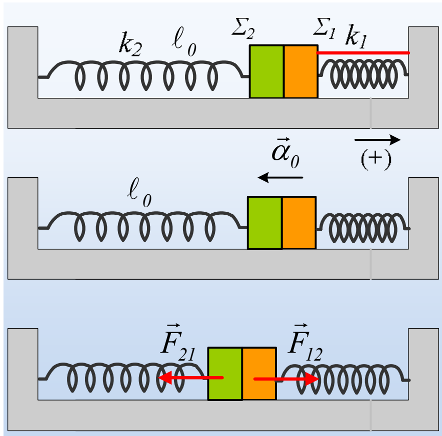
Ένα σύστημα δύο σωμάτων σε ταλάντωση



Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1=1kg και m_2=3kg ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή, δεμένα στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1=100N/m και k_2=60N/m αντίστοιχα. Το $Σ_1$ διατηρεί το ελατήριο k_1 συσπειρωμένο κατά $Δl_1$=0,4m, με τη βοήθεια ενός νήματος που το συνδέει με κατακόρυφο τοίχο, ενώ το δεύτερο ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του.

i) Να υπολογιστεί η τάση το νήματος, καθώς και η δύναμη F_{12} που ασκείται στο σώμα $Σ_1$ από το $Σ_2$.

Σε μια στιγμή t_0=0 κόβουμε το νήμα.

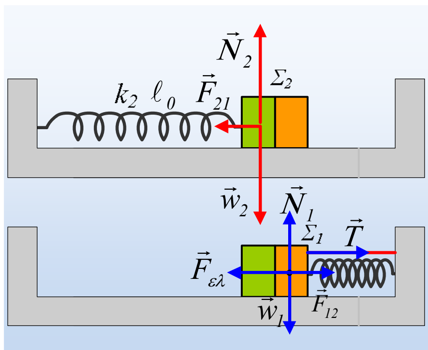
ii) Να υπολογίστε την αρχική επιτάχυνση $α_0$ που θα αποκτήσουν τα δυο σώματα, καθώς και το μέτρο της δύναμης F_{12}, αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.

iii) Αφού αποδειχθεί ότι το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ, να υπολογισθεί η περίοδος της ταλάντωσης, καθώς και η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος των δύο σωμάτων.

iv) Υποστηρίζεται ότι τα δυο σώματα κάποια στιγμή της διάρκειας της ταλάντωσης αποχωρίζονται. Για να εξετάσουμε την υπόθεση αυτή, βρίσκουμε την δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων. Στη θέση που αυτή μηδενίζεται, τα σώματα θα αποχωρίζονται κινούμενα αυτόνομα. Να βρεθεί λοιπόν η δύναμη F_{21} σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και να γίνει η γραφική της παράσταση. Τι συμπεραίνετε, αποχωρίζονται τα σώματα, εκτελώντας από κάποια θέση και μετά, το καθένα τη δική του ταλάντωση;

Δίνεται $π^2≈10$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα (πάνω) έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα $Σ_2$, όπου η δύναμη F_{21} είναι η δύναμη που δέχεται από το σώμα $Σ_1$.Το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του και δεν ασκεί δύναμη. Από την ισορροπία του σώματος $Σ_2$ παίρνουμε:

$$ΣF_x=0 \text{ ή } F_{21}=0.$$

Πράγμα που σημαίνει ότι το σώμα $Σ_1$ δεν ασκεί δύναμη στο $Σ_2$.

Ερχόμαστε τώρα στο κάτω σχήμα και στις δυνάμεις στο σώμα $Σ_1$, το οποίο δέχεται μηδενική αντίδραση από το $Σ_2$, F_{12}=0, οπότε:

$$ΣF_x=0 \text{ ή } T=F_{ελ}=k_1 \cdot Δl_1 =100 \cdot 0{,}4N=40N.$$

ii) Μόλις κόψουμε το νήμα, τα σώματα πλέον δεν ισορροπούν και εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για καθένα χωριστά, θεωρώντας θετική φορά την προς τα δεξιά, παίρνουμε:

$$\Sigma F_{x,1}= m_1\cdot\alpha_1 \;\rightarrow\; -F_{\varepsilon\lambda}+F_{12}=m_1\cdot\alpha_0 \;(1)$$

$$\Sigma F_{x,2}=m_2\cdot\alpha_2 \;\rightarrow\; -F_{21}=m_2\cdot\alpha_0 \;(2)$$

Αφού τα σώματα θα κινηθούν μαζί αποκτώντας την ίδια επιτάχυνση. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

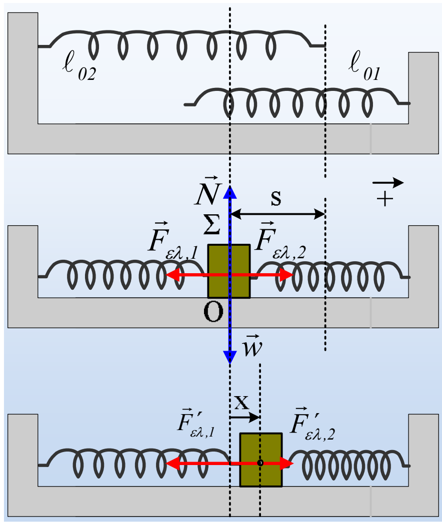
$$-k\cdot\Delta\ell_1=(m_1+m_2)\alpha_0 \rightarrow \alpha_0=-\frac{k\cdot\Delta\ell_1}{m_1+m_2}=-\frac{100\cdot 0{,}4}{1+3}m/s^2=-10m/s^2.$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο, μας λέει ότι η επιτάχυνση έχει φορά προς τα αριστερά.

Με αντικατάσταση δε στην (1) παίρνουμε:

$$F_{12}=F_{\varepsilon\lambda}+m_1\cdot\alpha_0=40N+1\cdot(-10)N=30N$$

iii) Θεωρούμε ότι το σύστημα των δύο σωμάτων, αποτελεί ένα νέο σώμα Σ. Το σώμα Σ, με την επίδραση των δυνάμεων από τα δυο ελατήρια ισορροπεί σε μια θέση Ο, η οποία απέχει κατά s, από την αρχική θέση, όπου και τα δύο ελατήρια είναι συσπειρωμένα, οπότε δέχεται τις δυνάμεις $F_{\varepsilon\lambda,1}$ και $F_{\varepsilon\lambda,2}$, όπως στο σχήμα.



Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ, παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,1}=F_{\varepsilon\lambda,2} \rightarrow k_1\cdot(\Delta l_1-s)=k_2\cdot s \;\; ή$$

$$s=\Delta\ell_1\frac{k_1}{k_1+k_2}=0{,}4\frac{100}{100+60}m=0{,}25m$$

Εξάλλου, αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση, στην οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας του και θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε:

$$\Sigma F=\Sigma F_x=F'_{\varepsilon\lambda,2}-F'_{\varepsilon\lambda,1}=k_2(s-x)-k_1(\Delta\ell_1-s+x)\rightarrow$$

$$\Sigma F=\cancel{k_2 s}-k_2x-k_1(\cancel{\Delta\ell_1-s})-k_1x=-(k_1+k_2)x$$

Άρα το σώμα Σ εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από τη θέση Ο, με πλάτος A=s=0,25m, αφού ξεκίνησε από ακραία θέση, με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$ και περίοδο:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k_1+k_2}}=2\pi\sqrt{\frac{1+3}{100+60}}s=2\pi\sqrt{\frac{1}{40}}s\approx 1s$$

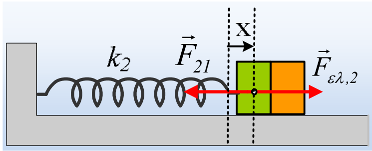
Οπότε θα αποκτήσει και μέγιστη ταχύτητα, με μέτρο:

$$\upsilon_{max}=\omega A=\frac{2\pi}{T}A=2\pi\frac{1}{4}m/s={}^{\pi}\!/_{2}\,m/s\approx 1{,}57m/s$$

iv) Ας έρθουμε τώρα στο σώμα Σ_2 στην παραπάνω θέση, η οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας. Το σώμα στη θέση αυτή, έχει επιτάχυνση $\alpha=-\omega^2\cdot x$ με την επίδραση των δυνάμεων του παρακάτω σχήματος, οπότε:

$$\Sigma F_2=m_2\cdot\alpha \ \rightarrow F_{\varepsilon\lambda,2}+F_{21}=m_2\cdot(-\omega^2\cdot x) \ \rightarrow$$

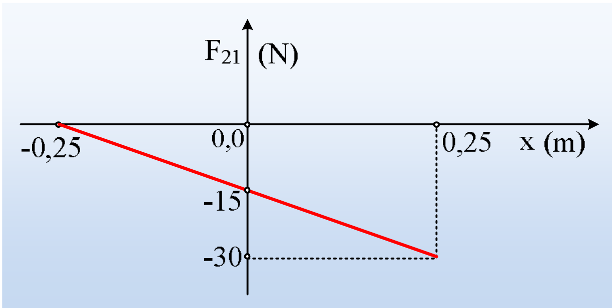
$$F_{21}=-m_2\cdot\omega^2\cdot x-k_2(s-x) \rightarrow$$



Και με αντικατάσταση:

$$F_{21}=-3\cdot(2\pi)^2\cdot x-60(0,25-x)=-120x-15+60x=-60x-15 \ \text{(S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της οποίας, είναι:



Με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, βλέπουμε ότι η δύναμη μεταξύ των δύο σωμάτων μηδενίζεται στιγμιαία στην αριστερή ακραία θέση, οπότε τα δυο σώματα εκτελούν όλη την ταλάντωση μαζί, σαν ένα σώμα χωρίς να αποχωρίζονται και να κινούνται ανεξάρτητα, για κάποιο χρονικό διάστημα.

Σχόλιο:

Αν είχαμε υπολογίσει την δύναμη που ασκείται στο Σ_1 θα βρίσκαμε την αντίδραση της παραπάνω δύναμης F_{21}, με αλγεβρική τιμή $F_{12}=60x+15$ (S.I.) και φορά προς την θετική κατεύθυνση.

dmargaris@gmail.com