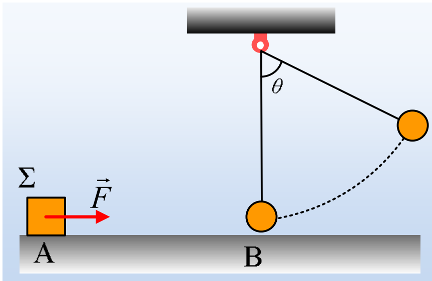
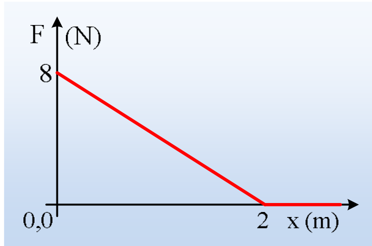
# Μια μεταβαλλόμενη κίνηση και μια κρούση




Το σώμα Σ μάζας $m_1$=1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο στη θέση Α, απέχοντας κατά (ΑΒ)= 3m από μια σφαίρα που κρέμεται στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους l=0,4m. Κάποια στιγμή ασκείται στο Σ μια μεταβλητή οριζόντια δύναμη F, με κατεύθυνση προς τη σφαίρα, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα.

Φτάνοντας το σώμα Σ στη θέση Β, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα, η οποία εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά μέγιστη γωνία θ=60°.




i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Σ, μέσω της δύναμης F.

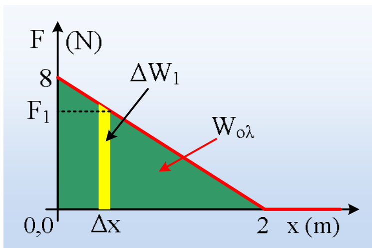
ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ τη στιγμή που έχει μετατοπισθεί κατά $x_1$=0,5m;

iii) Να υπολογιστεί η μάζα $m_2$ της σφαίρας.

iv) Σε πόσο χρόνο, μετά την κρούση, το σώμα Σ θα περάσει ξανά από τη θέση Α;

Δίνεται g=10m/s$^2$.

***Απάντηση:***

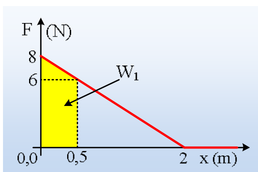



i) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ, μέσω της δύναμης F, είναι ίση με το έργο της δύναμης. Αλλά το έργο μιας μεταβλητής δύναμης, μπορεί να υπολογιστεί αν χωρίσουμε τη διαδρομή σε στοιχειώδεις μετατοπίσεις Δx, όπου σε κάθε μια από αυτές, η δύναμη μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Αλλά τότε το στοιχειώδες έργο θα είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου, δηλαδή:

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x = \Delta E_1.$$

Αλλά τότε δεν έχουμε να προσθέσουμε όλα αυτά τα στοιχειώδη έργα $\Delta W_i$, για όλα τα $\Delta x_i$, οπότε το συνολικό έργο θα προκύπτει ίσο αριθμητικά, με το εμβαδόν του πράσινου τριγώνου:

$$W = \frac{1}{2}\beta\upsilon = \frac{1}{2}2 \cdot 8J = 8J$$




ii) Με την ίδια συλλογιστική, μετά από μετατόπιση κατά $x_1$=0,5m, το σώμα θα έχει κινητική ενέργεια, ίση με το αντίστοιχο έργο της δύναμης $W_1$, το οποίο θα υπολογιστεί από το αντίστοιχο έργο του κίτρινου τραπεζίου, στο διπλανό σχήμα. Ναι, αλλά ποιο το μέτρο της δύναμης σε μια τυχαία θέση; Η συνάρτηση της δύναμης είναι της μορφής:

$$F=\alpha x+\beta,$$

Όπου για x=0, F=8 → β=8 και για x=2m, F=0 → α=-4 (S.I.) οπότε:

$$F=-4x+8 \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

Έτσι για $x_1$ =0,5m βρίσκουμε $F_1$=6N και έχουμε:

$$W_1 = \frac{8+6}{2}0{,}5J = 3{,}5J$$

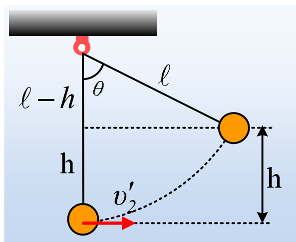
Όμως $K_1$=$W_1$ οπότε $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = W_1 \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2W_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3{,}5}{1}}m/s = \sqrt{7}m/s$

Ξεκινώντας από το ΘΜΚΕ, έχουμε για την παραπάνω θέση:

$$\Delta K = W_{o\lambda} \rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = \Sigma F\cdot \upsilon\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\cdot \upsilon\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 6\sqrt{7}J/s$$

iii) Έστω $\upsilon_2'$ η ταχύτητα που αποκτά η σφαίρα, μετά την κρούση, εξαιτίας της οποίας εκτρέπεται κατά γωνία θ, όπως στο σχήμα.




$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\ell - h}{\ell} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\ell - h}{\ell} \rightarrow h = \frac{\ell}{2} = 0{,}2m$$

Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνησή της, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση ισορροπίας της, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, ενώ η ταχύτητα της σφαίρας μηδενίζεται μόλις το νήμα εκτραπεί κατά γωνία θ, θα έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + 0 = 0 + m_2gh \rightarrow$$

$$\upsilon_2' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}2}m/s = 2m/s$$

Αλλά για τις ταχύτητες των σωμάτων, μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση ισχύουν:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \quad (2)$$

Όπου η ταχύτητα $\upsilon_0$ του σώματος Σ πριν την κρούση, ίση με την ταχύτητα μετά από μετατόπιση x=2m έχει μέτρο:

$$K_1 = W \rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = W \rightarrow$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2W}{m_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8}{1}}m/s = 4m/s$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$2 = \frac{2 \cdot 1}{1 + m_2} 4 \to m_2 = 3kg$$

iv) Για την ταχύτητα του σώματος Σ μετά την κρούση, η (1) δίνει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_0 = \frac{1 - 3}{1 + 3} 4m/s = -2m/s$$

Όπου το πρόσημο μας δείχνει ότι το σώμα θα κινηθεί προς τα αριστερά. Αλλά η κίνησή του θα είναι ευθύγραμμη ομαλή, για την οποία:

$$\Delta x = \upsilon_1' \cdot \Delta t \to$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon_1'} = \frac{-3m}{-2m/s} = 1{,}5s$$

**dmargaris@gmail.com**