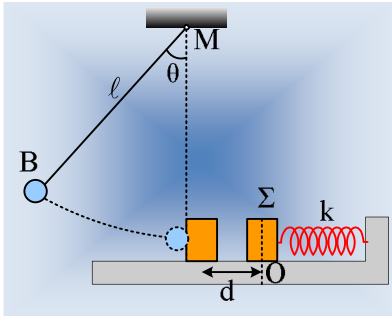
Στη διάρκεια της ταλάντωσης έχουμε μια κρούση



Ένα σώμα Σ μάζας M=3kg ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς k=375N/m, γύρω από μια θέση ισορροπίας O, όπως στο σχήμα, έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_1=7,5J. Μια σφαίρα μάζας m=1kg είναι δεμένη στο άκρο νήματος μήκους l=2m, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο στο σημείο Μ. Η σφαίρα συγκρατείται στη θέση Β, με το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ, όπου συνθ=0,6. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη τη σφαίρα να κινηθεί και αυτή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ, τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο και το Σ απέχει κατά d, από τη θέση ισορροπίας του. Μετά την κρούση η σφαίρα επιστρέφει μέχρι τη θέση που το νήμα να σχηματίσει με την κατακόρυφο γωνία φ, όπου συνφ=0,9.

Να υπολογιστούν:

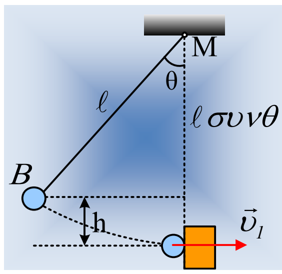
i) Οι ταχύτητες της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση και αμέσως μετά από αυτήν.

ii) Οι αντίστοιχες ταχύτητες του σώματος Σ.

iii) Η απόσταση d της θέσης κρούσης, από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ.

iv) Η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ, μετά την κρούση.

Απάντηση:

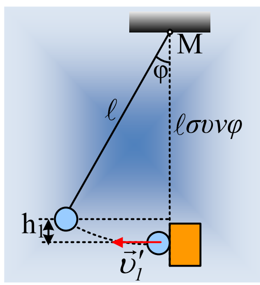


i) Έστω ότι τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο (ελάχιστα πριν την κρούση), η σφαίρα έχει ταχύτητα υ_1, όπως στο σχήμα, έχοντας κατέλθει κατά h, όπου $h = \ell - \ell\sigma\upsilon\nu\theta = \ell(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)$.Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την πιο χαμηλή θέση, ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε, για την κίνηση της σφαίρας:

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \quad (1) \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 2(1-0{,}6)}m/s = 4m/s$$



Εξάλλου αν υ_1' το μέτρο της ταχύτητας αμέσως μετά την κρούση και h_1 το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα, με την ίδια λογική, όπως παραπάνω, θα έχουμε για το μέτρο της ταχύτητας υ_2 από την (1):

$$mgh_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 \quad \rightarrow$$

$$\upsilon_1' = \sqrt{2g\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 2(1-0,9)}m/s = 2m/s$$

ii) Για την ελαστική κρούση μεταξύ της σφαίρας και του σώματος Σ ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\upsilon_1' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 \quad (2) \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \quad (3)$$

όπου υ_2 η ταχύτητα πριν την κρούση του σώματος Σ.

Λύνουμε την (2) ως προς υ_2 και με αντικατάσταση (θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, οπότε υ'_1=-2m/s), βρίσκουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{m+M}{2M}\upsilon_1' - \frac{m-M}{2M}\upsilon_1 = \frac{1+3}{2\cdot 3}(-2)m/s - \frac{(1-3)4}{2\cdot 3}m/s = 0$$

Δηλαδή ελάχιστα πριν τη στιγμή της κρούσης, το σώμα Σ έχει μηδενική ταχύτητα, βρίσκεται δηλαδή στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσής του. Αλλά τότε με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 = \frac{2\cdot 1}{1+3}4m/s = 2m/s$$

iii) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα d=A_1 όπου A_1 το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης του σώματος Σ. Αλλά από την ενέργεια ταλάντωσης έχουμε:

$$E_{\tau,1} = \frac{1}{2}DA_1^2 \rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_{\tau,1}}{D}} = \sqrt{\frac{2E_{\tau,1}}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7,5}{375}}m = 0,2m$$

Άρα και η ζητούμενη απόσταση είναι d=0,2m.

iv) Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x_2=-A_1=-0,2m (θεωρούμε θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση) έχοντας ταχύτητα υ_2'=2m/s, ξεκινώντας μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας Ο. Από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που πρόκειται να αποκτήσει το σώμα Σ::

$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2}DA_2^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\upsilon_2'^2 + \frac{k}{M}x_2^2} = \sqrt{2^2 + \frac{375}{3}0,2^2}\,m/s = 3m/s$$

dmargaris@gmail.com