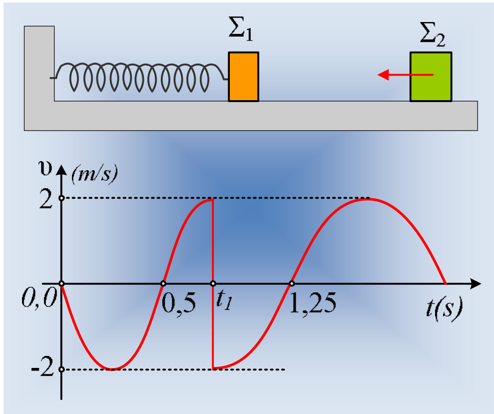
Πληροφορίες από ένα διάγραμμα ταχύτητας



Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=1kg εκτελεί ΑΑΤ δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή t_1 το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται μετωπικά με δεύτερο σώμα $Σ_2$, το οποίο κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Στο σχήμα δίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας του $Σ_1$ σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική. Αντλώντας στοιχεία από το διάγραμμα αυτό, να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις:

i) Ποια η τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου και ποια η αρχική απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$;

ii) Η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι ελαστική ή όχι; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

iii) Πόση είναι η μάζα του σώματος $Σ_2$ και ποια η ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση;

iv) Πόσο τοις εκατό μετεβλήθη το πλάτος ταλάντωσης, λόγω της κρούσης;

v) Να δώσετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο (x-t) για την νέα ταλάντωση που προκύπτει μετά την κρούση.

Δίνεται $π^2 \approx 10$.

Απάντηση:

i) Με βάση το διάγραμμα ½ T_1=0,5s → T_1=1s, όπου T_1 η περίοδος της ταλάντωσης πριν την κρούση. Η περίοδος όμως αυτή, δίνεται από την εξίσωση $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ οπότε:

$$k = \frac{4\pi^2 m_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1}{1^2} N/m = 40 N/m$$

Τη στιγμή t=0 το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα, συνεπώς βρίσκεται σε ακραία θέση, θέση πλάτους. Αμέσως μετά αποκτά αρνητική ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι κινήθηκε προς τα αριστερά, αλλά τότε βρισκόταν στην θετική (δεξιά) ακραία θέση της ταλάντωσής του. Εξάλλου για το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ισχύει: $υ_{max}=A_1 \cdot ω \rightarrow A_1 = \frac{υ_{max}}{ω} = \frac{υ_{max}}{2π} T_1 = \left(\frac{1}{π}\right) m \approx 0{,}32m$

Συνεπώς τη στιγμή t=0, το $Σ_1$ βρίσκεται στη θέση x_0=+0,32m.

ii) Τη στιγμή t_1 που έγινε η κρούση, το $Σ_1$ είχε μέγιστη ταχύτητα 2m/s, άρα περνούσε από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς τα δεξιά. Αλλά τότε t_1= ¾ T_1=0,75s. Η νέα ταλάντωση ξεκινά επίσης με μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, από τη θέση ισορροπίας, με αποτέλεσμα για να φτάσει το $Σ_1$ σε ακραία θέση, θα απαιτηθεί χρονικό διάστημα Δt=1,25s-t_1= ¼ T_2 ή 4·(1,25-0,75)s=T_2, οπότε: T_2=2s.

Για να αλλάξει όμως η περίοδος, θα πρέπει να αλλάξει η μάζα του σώματος που ταλαντώνεται. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν, η κρούση των δύο σωμάτων είναι **πλαστική**. Να σημειωθεί ότι, έτσι και αλλιώς είτε η κρούση είναι πλαστική ή όχι, η θέση ισορροπίας είναι η ίδια, η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

iii) Η περίοδος μετά την πλαστική κρούση, θα δίνεται από την εξίσωση $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_{ολ}}{k}}$, οπότε λύνοντας ως προς $m_{ολ}$ παίρνουμε:

$$m_{ολ} = \frac{T_1^2 k}{4\pi^2} = \frac{2^2 \cdot 40}{4 \cdot 10} kg = 4kg$$

Αλλά $m_{ολ}=m_1+m_2 \rightarrow m_2=m_{ολ}-m_1=(4-1)kg=3kg$.

Με εφαρμογή εξάλλου της διατήρησης της ορμής κατά την κρούση και θεωρώντας V την αρχική ταχύτητα του$Σ_2$ παίρνουμε:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \rightarrow m_1 υ_1 + m_2 V = (m_1+m_2)υ_κ \rightarrow$$

$$V = \frac{(m_1+m_2)υ_κ - m_1 υ_1}{m_2} = \frac{4\cdot(-2)-1\cdot 2}{3} m/s = -\frac{10}{3} m/s$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο μας δείχνει ότι το σώμα $Σ_2$ πριν την κρούση είχε ταχύτητα προς τα αριστερά.

iv) Για την ταλάντωση μετά την κρούση έχουμε:

$$υ_{max,2} = A_2 \cdot ω_2 \rightarrow A_2 = \frac{υ_{max,2}}{ω_2} = \frac{υ_{max,2}}{2\pi} T_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right) m \approx 0{,}64m$$

Παρατηρούμε δηλαδή διπλασιασμό του πλάτους ταλάντωσης ή αλλιώς μια αύξησή του κατά 100%.

v) Η εξίσωση της απομάκρυνσης μετά την κρούση, λαμβάνοντας υπόψη ότι το σώμα «ξεκινά» τη στιγμή t_1 από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση, θα έχει τη μορφή:

$$x = A_2 \cdot ημ(ω_2 t' + \pi)$$

Όπου $t'=t-t_1=t-0{,}75$ και $ω_2=2\pi/T_2=\pi$ rad/s, οπότε παίρνουμε:

$$x = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot ημ\left(\pi(t-0{,}75)+\pi\right) \quad t \geq 0{,}75s \;\; στο\; (S.I.)\; ή$$

$$x = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot ημ\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \;\; με \;\; t \geq 0{,}75s \quad (S.I.)$$

dmargaris@gmail.com