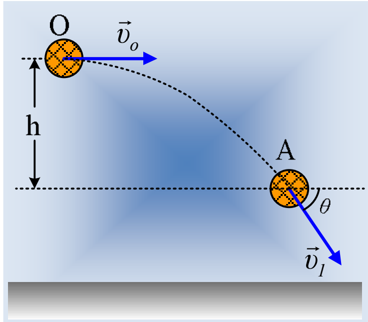
Μια οριζόντια βολή μέσα στον αέρα

Μια μπάλα μάζας m=0,4kg εκτοξεύεται οριζόντια, από ορισμένο ύψος, με αρχική ταχύτητα $υ_o$=5m/s. Κατά τη διάρκεια της κίνησής της, δέχεται δύναμη αντίστασης από τον αέρα, της μορφής $\vec{F}=-b\vec{υ}$, (δύναμη αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα και μέτρου ανάλογου προς το μέτρο της ταχύτητας). Μετά από λίγο η μπάλα περνά από μια θέση Α, η οποία βρίσκεται χαμηλότερα της θέσης εκτόξευσης κατά h=1m, έχοντας ταχύτητα μέτρου $υ_1$=6m/s, η οποία σχηματίζει γωνία θ=45° με την οριζόντια θέση, όπως στο σχήμα.



i) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη, μια στην οριζόντια διεύθυνση και μια στην κατακόρυφη. Οι κινήσεις στους δυο άξονες θα είναι:

α) Ευθύγραμμη ομαλή στον οριζόντιο και ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα.

β) Ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη στον οριζόντιο και ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση στον κατακόρυφο άξονα.

γ) Μεταβαλλόμενη κίνηση στον οριζόντιο και μεταβαλλόμενη κίνηση στον κατακόρυφο άξονα.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά την επιλογή σας.

ii) Αν η μπάλα, αποκτήσει αρχική οριζόντια επιτάχυνση μέτρου $α_o$=1,5m/s^2, αμέσως μετά την εκτόξευση, να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς b, η οποία εισέρχεται στην εξίσωση της δύναμης.

iii) Να υπολογιστεί η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης της μπάλας, στη θέση Α.

iv) Να υπολογιστεί το έργο της αντίστασης του αέρα από τη θέση Ο, μέχρι τη θέση Α.

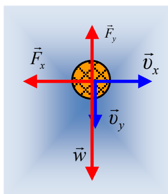
v) Για τη στιγμή που η μπάλα περνά από τη θέση Α, να βρεθούν:

α) Η ισχύς του βάρους.

β) Η ισχύς της αντίστασης του αέρα.

Δίνονται g=10m/s^2, ημθ=συνθ=√2/2

Απάντηση:



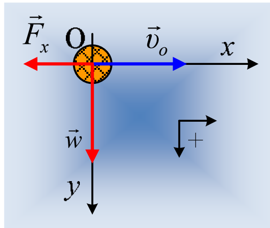
i) Έστω η μπάλα σε μια τυχαία θέση, όπου έχει οριζόντια ταχύτητα $υ_x$ και κατακόρυφη $υ_y$. Τότε δέχεται και μια δύναμη αντίστασης από τον αέρα, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες F_x και F_y, όπως στο σχήμα.
Για τα μέτρα των συνιστωσών αυτών θα ισχύει $F_x=b·υ_x$ και $F_y=b·υ_y$.
Αλλά τότε στον άξονα x η μπάλα επιβραδύνεται, οπότε μειώνεται η συνιστώσα της ταχύτητας $υ_x$, με αποτέλεσμα να μειώνεται και το μέτρο της αντίστασης F_x, συνεπώς και η επιτάχυνση (ε-

πιβράδυνση) α_x. Συνεπώς στην οριζόντια διεύθυνση η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη), αλλά όχι ομαλά.

Στον άξονα y, η συνιστώσα υ_y αυξάνεται αφού η μπάλα επιταχύνεται, αρχικά εξαιτίας τους βάρους και στη συνέχεια εξαιτίας της συνισταμένης $w\text{-}F_y=mg\text{-}b\cdot\upsilon_y$. Αλλά αφού αυξάνεται η ταχύτητα υ_y, θα μειώνεται η συνισταμένη, συνεπώς και η επιτάχυνση της μπάλας. Έτσι η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα y είναι μεν επιταχυνόμενη, αλλά με επιτάχυνση η οποία μειώνεται στη διάρκεια της βολής. Συνεπώς η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη), αλλά όχι ομαλά.

Σωστή η γ) πρόταση.

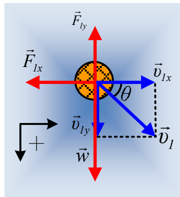
ii) Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα στη διεύθυνση x, θεωρώντας την προς τα δεξιά φορά θετική (όπως στο διπλανό σχήμα), αμέσως μετά την εκτόξευση θα έχουμε:



$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_x \rightarrow F_x=m\cdot\alpha_x \rightarrow -b\cdot\upsilon_o=m\cdot\alpha_x \rightarrow$$

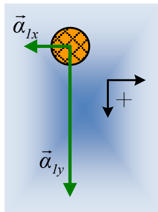
$$b=-\frac{ma_x}{\upsilon_o}=-\frac{0{,}4\cdot(-1{,}5)}{5}\frac{kg\cdot m/s^2}{m/s}=0{,}12kg/s$$

iii) Τη στιγμή που η μπάλα περνάει από τη θέση Α, έχοντας ταχύτητα υ_1, δέχεται τις δυνάμεις του διπλανού σχήματος, οπότε από το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{1x} \rightarrow F_{1x}=m\cdot\alpha_{1x} \rightarrow$$

$$a_{1x}=\frac{-b\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta}{m}=\frac{-0{,}12\cdot 6\cdot\sqrt{2}/2}{0{,}4}m/s^2=-0{,}9\sqrt{2}m/s^2\approx-1{,}3m/s^2$$



$$\Sigma F_y=m\cdot\alpha_{1y} \rightarrow w+F_{1y}=m\cdot\alpha_{1y} \rightarrow$$

$$a_{1y}=\frac{mg-b\upsilon_1\eta\mu\theta}{m}=\frac{0{,}4\cdot 10-0{,}12\cdot 6\cdot\sqrt{2}/2}{0{,}4}m/s^2=\left(10-0{,}9\sqrt{2}\right)m/s^2\approx 8{,}7m/s^2$$

iv) Εφαρμόζουμε για τη μπάλα το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) μεταξύ των θέσεων Ο και Α:

$$K_A\text{-}K_O=W_w+W_F$$

Όπου W_F το έργο της αντίστασης του αέρα, ενώ W_w=mgh, αφού το βάρος είναι δύναμη συντηρητική και το έργο της δεν εξαρτάται από τη διαδρομή. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

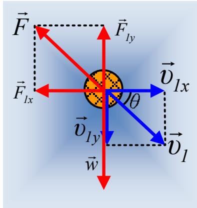
$$W_F=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m\upsilon_o^2-mgh=\frac{1}{2}0{,}4\left(6^2-5^2\right)J-0{,}4\cdot 10\cdot 1J=-1{,}8J.$$

Όπου το (-) μας λέει ότι μέσω της αντίστασης του αέρα αφαιρείται ενέργεια από τη μπάλα η οποία μετατρέπεται σε θερμική.

v) Για την στιγμιαία ισχύ μιας δύναμης ισχύει:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds \cdot συνα}{dt} = F \cdot υ \cdot συνα$$

Όπου F το **μέτρο** της δύναμης και υ το **μέτρο** της ταχύτητας του σώματος. Με βάση αυτά έχουμε:



α) Για την ισχύ του βάρους:

$$P_w = W \cdot υ_1 \cdot συν(90° - θ) = mg \cdot υ_1 \cdot ημθ = 0,4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} W = 12\sqrt{2} W$$

β) Για την ισχύ της αντίστασης του αέρα έχουμε:

$$P_F = F_1 \cdot υ_1 \cdot συν180^o = -F_1 \cdot υ_1 = -bυ_1^2 = -0,12 \cdot 6^2 W = -4,32W$$

Σχόλιο:

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ισχύ της αντίστασης του αέρα χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες F_x και F_y και τα έργα τους. Πράγματι:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{dW_{F_x}}{dt} + \frac{dW_{F_y}}{dt} = F_x \cdot υ_x \cdot συν180^o + F_y \cdot υ_y \cdot συν180^o = -F_x \cdot υ_x - F_y \cdot υ_y$$

Βέβαια αν συνεχίσουμε την παραπάνω σχέση θα πάρουμε:

$$P_F = -bυ_x \cdot υ_x - bυ_y \cdot υ_y = -b\left(υ_x^2 + υ_y^2\right) = -bυ^2.$$

Επανερχόμενοι σε σχέση για την συνολική δύναμη…

dmargaris@gmail.com