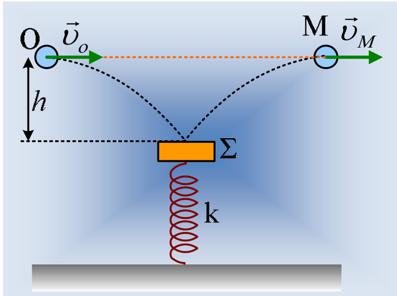
Μια κρούση στη διάρκεια μιας οριζόντιας βολής



Από μια θέση Ο, σε ορισμένο ύψος από το έδαφος, εκτοξεύεται οριζόντια μια σφαίρα μάζας m=1kg με ταχύτητα υ_o=1m/s. Η σφαίρα στην πορεία της και αφού μετατοπισθεί κατακόρυφα κατά h=0,2m, συναντά μια πλάκα Σ μάζας Μ=2kg. Η πλάκα πριν την κρούση ταλαντώνεται κατακόρυφα με πλάτος A_1=0,3m, στο πάνω άκρο ιδανικού ελατηρίου, με φυσικό μήκος l_o=1,2m και σταθερά k=25N/m. Η κρούση είναι ελαστική, χωρίς να εμφανιστούν τριβές στη διάρκειά της. Μετά από λίγο, η σφαίρα φτάνει στο σημείο Μ, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το σημείο εκτόξευσης Ο, έχοντας οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_M.

i) Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_M.

ii) Να βρείτε την μεταβολή της ορμής της σφαίρας, εξαιτίας της κρούσης.

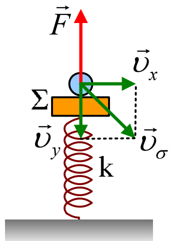
iii) Ποια η ταχύτητα της πλάκας ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση της με τη σφαίρα;

iv) Πόσο απέχει από το έδαφος η πλάκα της στιγμής της κρούσης;

v) Να βρεθεί το νέο πλάτος ταλάντωσης της πλάκας, μετά την κρούση.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Τη στιγμή που η σφαίρα συναντά την πλάκα, έχει κάποια ταχύτητα υ_σ, όπως στο διπλανό σχήμα, την οποία μπορούμε να αναλύσουμε σε μια οριζόντια συνιστώσα υ_x και μια κατακόρυφη υ_y. Κατακόρυφη είναι και η ταχύτητα της πλάκας λόγω ταλάντωσης. Αλλά τότε κρούση θα έχουμε εξαιτίας των κατακόρυφων ταχυτήτων, αφού εξαιτίας αυτών θα εμφανιστεί η κατακόρυφη δύναμη F στην σφαίρα (και η αντίδρασή της στην πλάκα), με αποτέλεσμα η δύναμη κρούσης να μεταβάλει την συνιστώσα υ_y, χωρίς να επηρεαστεί η υ_x. Αν θυμηθούμε όμως την οριζόντια βολή, η κίνηση της σφαίρας μπορεί να θεωρηθεί σύνθετη, όπου η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας δεν μεταβάλλεται, οπότε $\upsilon_x=\upsilon_0$=1m/s. Αλλά και μετά την κρούση, το βάρος θα μεταβάλλει ξανά την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της σφαίρας, οπότε στο σημείο Μ, όπου η ταχύτητά της θα είναι οριζόντια, αυτή θα είναι ίση με την ταχύτητα υ_o, αφού σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου δεν υπήρξε δύναμη που να μεταβάλλει την συνιστώσα υ_x.

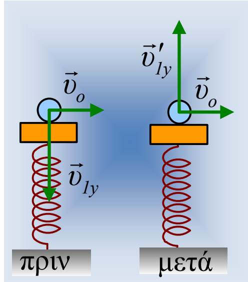
Συνεπώς $\upsilon_M=\upsilon_o$=1m/s.

ii) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την σφαίρα, από τη θέση Ο μέχρι τη θέση κρούσης (ελάχιστα πριν) και θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια στην τελική θέση, έχουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2=\frac{1}{2}m\left(\upsilon_o^2+\upsilon_{1y}^2\right)\rightarrow$$

$$\upsilon_{1y}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}2}m/s=2m/s$$



Με την ίδια λογική για την κίνηση αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη θέση Μ όπου η ταχύτητα γίνεται ξανά οριζόντια, θα έχουμε:

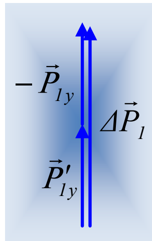
$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\left(\upsilon_o^2+\upsilon_{1y}'^2\right)=\frac{1}{2}m\upsilon_M^2+mgh\rightarrow$$

$$\upsilon_{1y}'=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}2}m/s=2m/s$$

Με φορά προς τα πάνω, όπως στο διπλανό σχήμα.

Αλλά τότε η μεταβολή της ορμής της σφαίρας, οφείλεται στη μεταβολή της ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση (στην οριζόντια διεύθυνση δεν ασκείται δύναμη και δεν έχουμε μεταβολή ταχύτητας και ορμής) και θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε:



$$\Delta\vec{P}_1=\vec{P}_{1y}'-\vec{P}_{1y}\ \rightarrow$$

$$\Delta P=m\upsilon_{1y}'-m\upsilon_{1y}=1\cdot 2kg\cdot m/s-1\cdot(-2)kg\cdot m/s=4kg\cdot m/s.$$

iii) Για την ελαστική κρούση μεταξύ σφαίρας και πλάκας ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας. Ας τις εφαρμόσουμε:

$$\vec{P}_{πριν}=\vec{P}_{μετά}\rightarrow\begin{cases} m\upsilon_x=m\upsilon'_x\rightarrow\upsilon'_{1x}=\upsilon_x=\upsilon_o\\ m\upsilon_{1y}+M\upsilon_2=m\upsilon'_{1y}+M\upsilon_2'\quad(1)\end{cases}$$

$$K_{πριν}=K_{μετά}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}M\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\left(\upsilon_o^2+\upsilon_{1y}^2\right)+\frac{1}{2}M\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m\left(\upsilon_o^2+\upsilon_{1y}'^2\right)+\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{1y}^2+\frac{1}{2}M\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{1y}'^2+\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2\quad(2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) είναι οι «γνωστές εξισώσεις» της κεντρικής ελαστικής κρούσης μεταξύ σφαίρας και πλάκας. Με άλλα λόγια, αν «ξεχάσουμε» την οριζόντια ταχύτητα υ_o της σφαίρας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε μια κεντρική ελαστική κρούση στην κατακόρυφη διεύθυνση, για την οποία, η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2), δίνει:

$$\upsilon'_{1y} = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_{1y} + \frac{2M}{m+M}\upsilon_2 \quad (3) \quad \text{και} \quad \upsilon'_2 = \frac{2m}{m+M}\upsilon_{1y} + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 \quad (4)$$

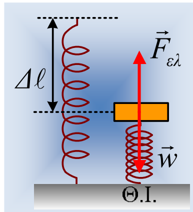
Από την (3), με θετική την προς τα πάνω κατεύθυνση βρίσκουμε:

$$\upsilon_2 = \frac{m+M}{2M}\upsilon'_{1y} - \frac{m-M}{2M}\upsilon_{1y} = \frac{1+2}{2\cdot 2}2m/s - \frac{1-2}{2\cdot 2}2m/s = 1m/s$$

Και από την (4):

$$\upsilon'_2 = \frac{2m}{m+M}\upsilon_{1y} + \frac{M-m}{m+M}\upsilon_2 = \frac{2\cdot 1}{1+2}(-2)m/s + \frac{2-1}{1+2}1m/s = -1m/s$$

iv) Η πλάκα ταλαντώνεται γύρω από μια θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $\Delta\ell$, όπως στο διπλανό σχήμα. Από την ισορροπία της πλάκας έχουμε:



$$\Sigma F = 0 \rightarrow \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = 0 \rightarrow k\cdot\Delta\ell = Mg \rightarrow \Delta\ell = \frac{Mg}{k} = \frac{2\cdot 10}{25}m = 0{,}8m$$

Δηλαδή στη θέση ισορροπίας η πλάκα βρίσκεται σε απόσταση από το έδαφος:

$$d = \ell_o - \Delta\ell = 1{,}2m - 0{,}8m = 0{,}4m.$$

Τη στιγμή της κρούσης η πλάκα βρίσκεται σε μια απομάκρυνση y, την οποία μπορούμε να βρούμε με τη βοήθεια της ενέργειας ταλάντωσης:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \rightarrow y = \sqrt{A_1^2 - \frac{M}{k}\upsilon_2^2} \rightarrow$$

$$y = \sqrt{A_1^2 - \frac{M}{k}\upsilon_2^2} = \sqrt{0{,}3^2 - \frac{2}{25}1}m = \sqrt{0{,}09 - 0{,}08}m = 0{,}1m$$

Η πλάκα δηλαδή ελάχιστα πριν την κρούση απέχει από τη θέση ισορροπίας κατά 0,1m, αλλά τότε βρίσκεται σε ύψος από το έδαφος:

$$H_1 = d + y = 0{,}4m + 0{,}1m = 0{,}5m \quad \text{ή} \quad H_2 = d - y = 0{,}4m - 0{,}1m = 0{,}3m$$

v) Από τη στιγμή που δεν άλλαξε το μέτρο της ταχύτητας της πλάκας κατά την κρούση (απλά ενώ είχε πριν ταχύτητα προς τα πάνω μέτρου 1m/s, απέκτησε ταχύτητα του ίδιου μέτρου με φορά προς τα κάτω), δεν θα μεταβληθεί και το πλάτος της νέας ταλάντωσης. Πράγματι από την ενέργεια ταλάντωσης θα έχουμε για μετά την κρούση:

$$E_{\tau,2} = \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}kA_2^2$$

dmargaris@gmail.com