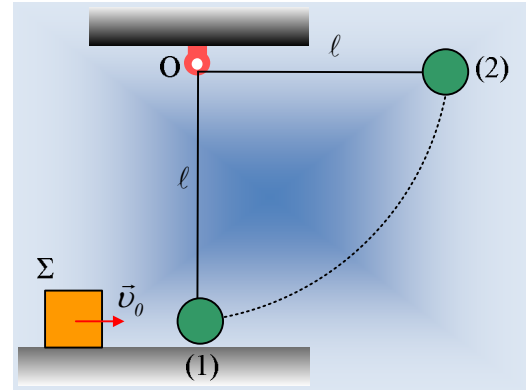


Δυο ελαστικές κρούσεις

Μια σφαίρα μάζας $m=0,5\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $\ell=1,25\text{m}$, (θέση 1), το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Ένα σώμα Σ μάζας $m_1=2,5\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα, με αποτέλεσμα αυτή μετά την κρούση, να εκτρέπεται μέχρι τη θέση (2), όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο.



- i) Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα v_0 του σώματος Σ , καθώς και η μεταβολή της ορμής του, η οποία οφείλεται στην κρούση.
- ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα το σώμα Σ κινείται με ταχύτητα u_0 , όταν συγκρούεται ξανά κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα. Μετά την κρούση, τη στιγμή που η σφαίρα περνά από την θέση (2), η τάση του νήματος είναι ίση με $T=4,4\text{N}$.
 - a) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.
 - β) Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα u_0 του σώματος Σ πριν την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- i) Έστω v_2 η ταχύτητα που αποκτά η σφαίρα, μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την παραπέρα κίνησή της, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την θέση ισορροπίας της, ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, ενώ η ταχύτητα της σφαίρας μηδενίζεται στην θέση (2), θα έχουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 0 + mgl \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2g\ell} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Αλλά για τις ταχύτητες των σωμάτων, μετά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση ισχύουν:

$$v_1 = \frac{m_1 - m}{m_1 + m}v_0 \quad (1) \quad \text{και} \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m}v_0 \quad (2)$$

Οπότε από την (2) παίρνουμε:

$$v_0 = \frac{m_1 + m}{2m_1}v_2 = \frac{2,5 + 0,5}{2 \cdot 2,5} 5 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

Ενώ για την ταχύτητα του σώματος Σ μετά την κρούση, η (1) δίνει:

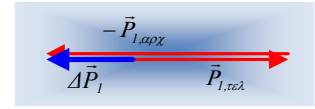
$$v_1 = \frac{m_1 - m}{m_1 + m} v_0 = \frac{2,5 - 0,5}{2,5 + 0,5} 3 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

Οπότε η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ, η οποία οφείλεται στην κρούση, είναι:

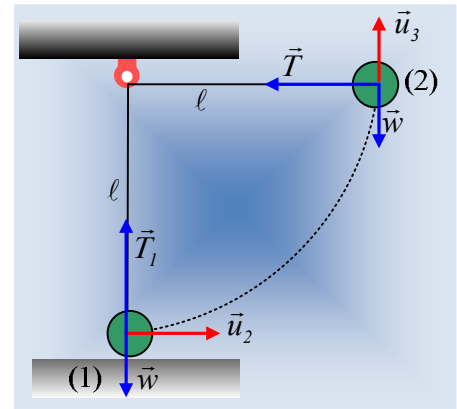
$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_{1,\text{τελ}} - \vec{P}_{1,\text{αρχ}} \rightarrow$$

$$\Delta P_1 = m_1(v_1 - v_0) = 2,5(2 - 3) \text{ kg}\cdot\text{m/s} = -2,5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Στο διπλανό σχήμα, φαίνονται τα αντίστοιχα διανύσματα.



- ii) Έστω τώρα, ότι αμέσως μετά την κρούση τα δυο σώματα έχουν ταχύτητες u_1 και u_2 . Η σφαίρα τη στιγμή που περνάει από την θέση (2) με το νήμα οριζόντιο, έχει κάποια κατακόρυφη ταχύτητα u_3 (κάθετη στο νήμα, αφού η τροχιά είναι κυκλική...) αφού αν δεν συνέβαινε αυτό και έφτανε στη θέση αυτή με μηδενική ταχύτητα, τότε θα ήταν και μηδενική η τάση του νήματος. Αλλά τότε η τάση αυτή του νήματος, στην θέση αυτή, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης και έχουμε:



$$T = m \frac{v_3^2}{R} \rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{T\ell}{m}} \rightarrow$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{T\ell}{m}} = \sqrt{\frac{4,4 \cdot 1,25}{0,5}} \text{ m/s} = \sqrt{11} \text{ m/s}$$

Οπότε εφαρμόζοντας ξανά την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, όπως παραπάνω, έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2} m u_2^2 = \frac{1}{2} m u_3^2 + m g \ell \rightarrow$$

$$u_2 = \sqrt{u_3^2 + 2g\ell} = \sqrt{11 + 2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

- α) Πριν την κρούση η σφαίρα ισορροπεί με την επίδραση της τάσης T_0 του νήματος και του βάρους, οπότε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow T_0 = w = m g = 0,5 \cdot 10 \text{ N} = 5 \text{ N}$$

Μετά την κρούση, η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση, για την οποία:

$$\Sigma F_R = m \frac{v_2^2}{R} \rightarrow T_1 - m g = m \frac{v_2^2}{\ell} \rightarrow$$

$$T_1 = m g + m \frac{v_2^2}{\ell} = 0,5 \left(10 + \frac{6^2}{1,25} \right) \text{ N} = 19,4 \text{ N}$$

- β) Παίρνοντας ξανά την εξίσωση (2) που συνδέει τις ταχύτητες της σφαίρας μετά την κρούση με την αρχι-

κή ταχύτητα του σώματος Σ, έχουμε:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m} u_0 \rightarrow u_0 = \frac{m_1 + m}{2m_1} u_2 \rightarrow$$

$$u_0 = \frac{m_1 + m}{2m_1} u_2 = \frac{2,5 + 0,5}{2 \cdot 2,5} 6 \text{ m/s} = 3,6 \text{ m/s}$$

dmargaris@gmail.com