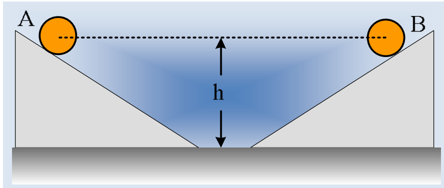
Στερεά κυκλικής διατομής. Δυο εφαρμογές.

Εφαρμογή 1η:



Δυο όμοιες σφαίρες συγκρατούνται πάνω σε δύο κεκλιμένα επίπεδα, στο ίδιο ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή τις αφήνουμε ταυτόχρονα να κινηθούν. Αν το αριστερό επίπεδο είναι λείο, ενώ η Β σφαίρα κυλίεται:

i) Όταν οι σφαίρες φτάσουν στο οριζόντιο επίπεδο:

α) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα έχει η Α σφαίρα.

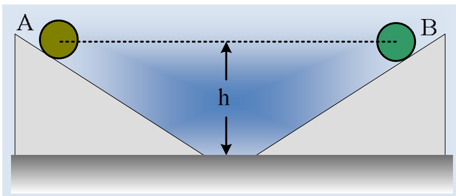
β) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα έχει η Β σφαίρα.

γ) Οι δύο σφαίρες θα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

ii) Πρώτη θα φτάσει στο οριζόντιο επίπεδο:

α) Η Α σφαίρα, β) Η Β σφαίρα, γ) Οι δυο σφαίρες θα φτάσουν ταυτόχρονα στο οριζόντιο επίπεδο.

Εφαρμογή 2η:



Τα δύο κεκλιμένα επίπεδα του διπλανού σχήματος, παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής με τα στερεά κυκλικής διατομής Α και Β, τα οποία συγκρατούνται στο ίδιο ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο. Τα δυο στερεά έχουν ίσες μάζες και αφήνοντάς τα να κινηθούν κυλίονται και φτάνουν στο οριζόντιο επίπεδο, με πρώτο το Β.

i) Όταν τα δυο στερεά φτάσουν στο οριζόντιο επίπεδο:

α) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα έχει το Α.

β) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα έχει το Β.

γ) Τα δυο στερεά θα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

ii) Αν I_1 η ροπή αδράνειας του Α στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του και I_2 και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας του Β, ισχύει:

α) $I_1 < I_2$, β) $I_1 = I_2$, γ) $I_1 > I_2$.

Απάντηση:

Εφαρμογή 1η :

i) Η σφαίρα Α κατεβαίνει κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου, οπότε η μηχανική της ενέργεια παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική δυναμική ενέργεια, θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο οριζόντιο επίπεδο. Οπότε η μέγιστη κινητική ενέργεια, ίση με αυτήν την οποία φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο, είναι ίση:

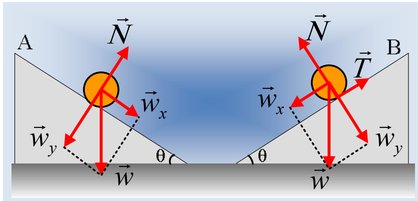
$$K_A=U_{A,\alpha\rho\chi}=mgh$$

Η Β σφαίρα κυλίεται, πράγμα που σημαίνει ότι το επίπεδο δεν είναι λείο, αλλά υπάρχει τριβή. Από τη στιγμή όμως που έχουμε κύλιση, η ασκούμενη τριβή είναι στατική η οποία δεν μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε θερμική, οπότε και πάλι η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Έτσι και πάλι:

$$K_B=U_{B,\alpha\rho\chi}=mgh$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $K_A=K_B$ και σωστή είναι η γ) πρόταση.

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στις δυο σφαίρες, όπου στη Β η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω, αφού η ροπή της είναι αυτή που θα προκαλέσει την γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας και θα της επιτρέψει να κυλίεται. Αλλά τότε για την κίνηση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε:



Σφαίρα Α: $\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm,A} \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta=m\cdot\alpha_{cm,A} \rightarrow \alpha_{cm,A}=g\cdot\eta\mu\theta$ (1)

Σφαίρα Β: $\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm,B} \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta- T=m\cdot\alpha_{cm,B} \rightarrow \alpha_{cm,B}=g\cdot\eta\mu\theta-\dfrac{T}{m}$ (2)

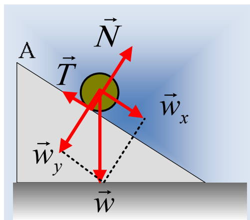
Με σύγκριση των (1) και (2) προκύπτει ότι η Α σφαίρα (που εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση) αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση κέντρου μάζας και φτάνει πρώτη στο οριζόντιο επίπεδο (για την κίνηση κατά μήκος του επιπέδου ισχύει η εξίσωση $x= ½\ \alpha_{cm}\cdot t^2$). Σωστό το α).

Εφαρμογή 2η:

i) Με βάση την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, αφού τα δυο στερεά κυλίονται, έχουμε ξανά διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, με αποτέλεσμα να ισχύει ξανά ότι $K_A=K_B=mgh$ και τα δυο στερεά αποκτούν ίσες τελικές κινητικές ενέργειες.

ii) Το στερεό Β που φτάνει πρώτο στο οριζόντιο επίπεδο έχει και τη μικρότερη ροπή αδράνειας, δηλαδή ισχύει $I_1 > I_2$. Ας το δούμε λίγο αναλυτικότερα.

Έστω ένα στερεό κυκλικής διατομής με ροπή αδράνειας Ι, το οποίο αφήνεται να κινηθεί κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου και κυλίεται. Οι δυνάμεις είναι αυτές στο διπλανό σχήμα. Θεωρώντας την κίνηση σύνθετη έχουμε:



Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow w_x-T=m\cdot\alpha_{cm}$ (3)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R= I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T=\dfrac{I}{R^2}\left(R\cdot a_{\gamma\omega\nu}\right)$ (4)

Αλλά από τη στιγμή που το στερεό κυλίεται ισχύει και $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (3) και (4) παίρνουμε:

$$w_x = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{mg\eta\mu\theta}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι όταν αυξάνεται η ροπή αδράνειας, μειώνεται η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, πράγμα που σημαίνει ότι αυξάνεται ο χρόνος καθόδου, αφού ισχύει $x = \frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot t^2$.

Σωστή η γ) πρόταση.

dmargaris@gmail.com