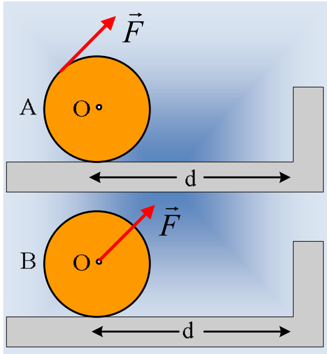
Κύλιση με πλάγια δύναμη



Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο Α, ο οποίος ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, έχουμε τυλίξει ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τραβώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος, ασκούμε στον κύλινδρο μια σταθερού μέτρου δύναμη F, η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση σταθερή γωνία θ, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται.

i) Να αποδειχθεί ότι το επίπεδο δεν μπορεί να είναι λείο και ότι θα ασκηθεί στον κύλινδρο στατική τριβή με φορά προς τα δεξιά.

ii) Ένας δεύτερος όμοιος κύλινδρος Β, ο οποίος αρχικά ηρεμεί στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, δέχεται την ίδια δύναμη F στο κέντρο μάζας του Ο, οπότε και αυτός κυλίεται. Αν ο Α κύλινδρος χρειάζεται χρόνο t_1 για να μετακινηθεί κατά d, τότε ο Β για την ίδια απόσταση d, θα χρειαστεί χρόνο t_2, όπου:

α) $t_1 < t_2$, α) $t_1 = t_2$, α) $t_1 > t_2$.

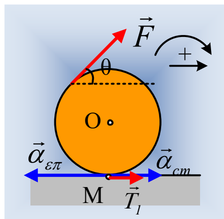
iii) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, μετά το τέλος της παραπάνω μετακίνησης κατά d, θα έχει:

α) Ο κύλινδρος Α, β) ο κύλινδρος Β, γ) θα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου $I_{cm}= ½\, mR^2$, ως προς τον άξονά του ο οποίος συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεών του.

Απάντηση:



i) **Έστω ότι το επίπεδο ήταν λείο**. Τότε θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από τον οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο Ο, θα έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F\cdot συνθ = m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = \frac{F\cdot συνθ}{m}$$

$$\Sigma\tau_o = I_{cm}\cdot\alpha_{γων} \rightarrow F\cdot R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{γων} \rightarrow R\alpha_{γων} = \frac{2F}{m}$$

Εστιάζοντας στο σημείο Μ, σημείο επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο, αυτό θα έχει μια επιτάχυνση ίση με την α_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια $\alpha_{επ}=\alpha_{γων}R$ εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Ο. Αλλά τότε το σημείο Μ θα έχει επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά και μέτρο:

$$\alpha_M = \alpha_{επ} - \alpha_{cm} = \frac{2F}{m} - \frac{F\cdot συνθ}{m} = \frac{F}{m}(2 - συνθ)$$

Η υπόθεσή μας δηλαδή ότι το επίπεδο είναι λείο μας οδηγεί σε άτοπο, αφού τότε ο κύλινδρος ολισθαίνει. Κατά συνέπεια στον κύλινδρο ασκείται δύναμη προς τα δεξιά (αφού το σημείο Μ τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά) και μιας και έχουμε κύλιση, η τριβή αυτή θα είναι στατική.

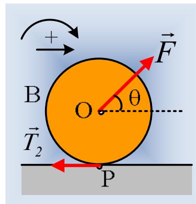
ii) Δουλεύοντας όπως παραπάνω, απλά προσθέτοντας τώρα και την στατική τριβή, θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + T_1 = m \cdot \alpha_{cm,1} \; (1)$$

$$\Sigma\tau_O = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow F \cdot R - T_1 \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow F - T_1 = \frac{1}{2} mR\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \; (2)$$

Αλλά αφού έχουμε κύλιση $\alpha_{cm,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} R$ και με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F + F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{2} m\alpha_{cm,1} \rightarrow \alpha_{cm,1} = \frac{2F(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{3m} \quad (3)$$



Ερχόμαστε τώρα στον κύλινδρο Β. Με την ίδια λογική του i) ερωτήματος, με την επίδραση μόνο της δύναμης F το σημείο επαφής με το επίπεδο P, τείνει να αποκτήσει ταχύτητα προς τα δεξιά, οπότε τώρα η τριβή θα έχει φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα. Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου θα πάρουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T_2 = m \cdot \alpha_{cm,2} \; (1\alpha)$$

$$\Sigma\tau_O = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_2 \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \rightarrow T_2 = \frac{1}{2} mR\alpha_{\gamma\omega\nu,2} \; (2\alpha)$$

Αλλά αφού έχουμε κύλιση $\alpha_{cm,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \cdot R$ και με πρόσθεση των (1α) και (2α) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{2} m\alpha_{cm,2} \rightarrow \alpha_{cm,2} = \frac{2F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{3m} \quad (3\alpha)$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (3) και (3$^{\alpha}$) προκύπτει ότι $\alpha_{cm,1} > \alpha_{cm,2}$ συνεπώς ο Α κύλινδρος αποκτώντας μεγαλύτερη επιτάχυνση κέντρου μάζας, θα διανύσει σε μικρότερο χρόνο την απόσταση d, αφού η κίνηση του κ.μ. είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη για την οποία $d = ½ \alpha_{cm} t^2$. Σωστό το α).

Σχόλιο:

Αφού εξηγήσαμε ότι η τριβή στον Α κύλινδρο είναι προς τα δεξιά, ενώ στον Β προς τα αριστερά, είναι φανερό ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο, του Α κυλίνδρου, θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του Β, οπότε θα απαιτηθεί μικρότερο χρονικό διάστημα για την ίδια μετακίνηση και χωρίς περαιτέρω μαθηματική επεξεργασία των δύο κινήσεων.

iii) Η κινητική ενέργεια που αποκτά κάθε κύλινδρος είναι ίση με το έργο της δύναμης F, αφού οι τριβές είναι στατικές και δεν παράγουν έργο. Αλλά για τα έργα των δύο δυνάμεων έχουμε:

Για τον Α κύλινδρο: $W_F = W_{\mu\varepsilon\tau} + W_{\sigma\tau\rho} = F_x \cdot x_{cm} + F \cdot R \cdot \theta = F \cdot d \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + F \cdot s \rightarrow$

$$W_{F,A} = F \cdot d(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Για τον Β κύλινδρο: $W_{F,B} = F_x \cdot x_{cm} = F \cdot d \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$.

Προφανώς $K_A > K_B$ και σωστό το α).

dmargaris@gmail.com