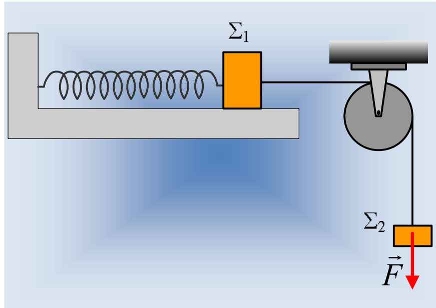
Ισορροπία και κίνηση ενός συστήματος



Το σώμα Σ_1 μάζας m_1=4kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=250N/m. Δένουμε το σώμα με αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο αφού περάσουμε από μια τροχαλία, στο άλλο άκρο του δένουμε ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2=1kg. Ασκώντας μια κατακόρυφη δύναμη F=90N συγκρατούμε ακίνητο το Σ_2 όπως στο σχήμα.

Δίνεται ότι η τροχαλία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά της, έχοντας ροπή αδράνειας I= ½ MR^2, το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας, ενώ $g=10m/s^2$.

i) Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά την ισορροπία του συστήματος.

ii) Σε μια στιγμή t_0=0, παύουμε να ασκούμε την δύναμη F. Αν η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ_2 είναι $\alpha_{02}=11,25m/s^2$, να βρεθεί η μάζα της τροχαλίας.

iii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, μηδενίζεται στιγμιαία η επιτάχυνση του σώματος Σ_2.

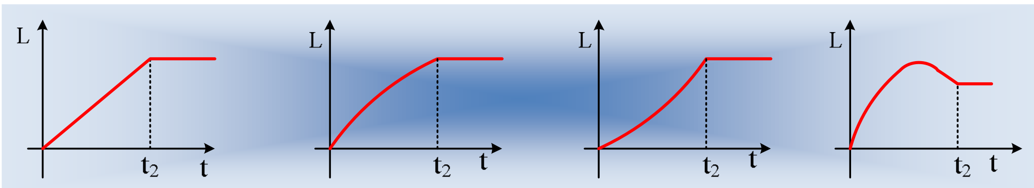
α) Να βρεθεί η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος των τριών σωμάτων τη στιγμή t_1.

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας, ως προς τον άξονά της τη στιγμή t_1;

iv) Αν τη στιγμή t_2 που η ταχύτητα του σώματος Σ_2 γίνει ίση με 2m/s, για δεύτερη φορά, κόψουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα, να βρεθούν:

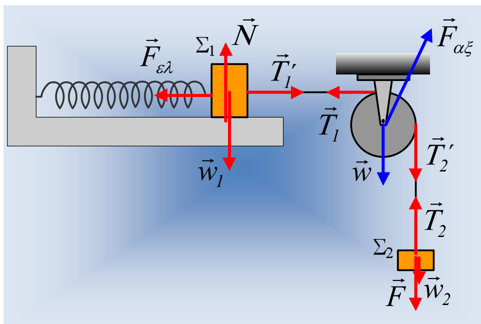
α) Η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_1.

β) Ποιο από τα παρακάτω ποιοτικά διαγράμματα, μπορεί να παριστά τη στροφορμή της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της, σε συνάρτηση με το χρόνο;



Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα τρία σώματα, τα οποία ισορροπούν. Από τη συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma F_1=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=T_1' \quad (1)$$

$$\Sigma F_{\tau\rho}=0 \rightarrow T_1 \cdot R - T_2' \cdot R=0 \rightarrow T_1=T_2' \quad (2)$$

$$\Sigma F_2=0 \rightarrow T_2=m_2g+F=1\cdot 10N+90N=100N$$

Οπότε παίρνουμε και $T_1=T_2{'}=100N$ και $F_{\varepsilon\lambda}=100N$.

Αλλά από το νόμο του Hooke έχουμε $F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta l \rightarrow \quad \Delta\ell=\frac{F_{\varepsilon\lambda}}{k}=\frac{100}{250}m=0{,}4m$.Συνεπώς το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U=\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2=\frac{1}{2}250\cdot 0{,}4^2\,J=20J$$

ii) Μόλις πάψουμε να τραβάμε το Σ_2 προς τα κάτω, με την άσκηση της δύναμης F, αυτό θα επιταχυνθεί προς τα πάνω. Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι αυτές που έχουν σημειωθεί παραπάνω (με εξαίρεση την F), παρότι τα μέτρα των τάσεων έχουν μεταβληθεί, σε σχέση με πριν, δεν θα αλλάξουμε συμβολισμό… για ευνόητους λόγους!

Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα και λαμβάνοντας υπόψη ότι όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια επιτάχυνση, οπότε και $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha$ για τις επιταχύνσεις των Σ_1, Σ_2 και την επιτάχυνση ενός σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας, παίρνουμε:

$$\Sigma_2\!: \ \Sigma F=m_2\cdot\alpha_2 \rightarrow T_2-m_2g=m_2\cdot\alpha \rightarrow T_2=m_2(g+\alpha)=1\cdot(10+11{,}25)N=21{,}25N.$$

$$\Sigma_1\!: \ F_{\varepsilon\lambda}-T_1{'}=m_1\cdot\alpha \rightarrow T_1{'}=F_{\varepsilon\lambda}-m_1\cdot\alpha=100N-4\cdot 11{,}25N=55N$$

Τροχαλία: $T_1\cdot R-T_2{'}R=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1{'}\cdot R-T_2\cdot R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1{'}-T_2= ½\, M\cdot\alpha \rightarrow$

$$M=\frac{2(T_1'-T_2)}{\alpha}=\frac{2(55-21{,}25)}{11{,}25}kg=6kg$$

iii) Τη στιγμή t_1 που μηδενίζεται η επιτάχυνση του Σ_2, μηδενίζεται ταυτόχρονα και η επιτάχυνση του Σ_1 και η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας. Αλλά τότε από τις ισορροπίες των σωμάτων έχουμε ότι $T_2=m_2g=10N$, όπως και $T_2{'}=T_2=T_1=T_1{'}=F'_{\varepsilon\lambda}=10N$. Άρα το ελατήριο τη στιγμή αυτή έχει επιμήκυνση:

$$\Delta\ell'=\frac{F'_{\varepsilon\lambda}}{k}=\frac{10}{250}m=0{,}04m$$

α) Στο διάστημα από 0-t_1 η ενέργεια του ελατηρίου μειώθηκε κατά:

$$\Delta U=U_{\alpha\rho\chi}-U_1=20J-\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell'\right)^2=20J-\frac{1}{2}250\cdot 0{,}04^2\,J=19{,}8J$$

Τι απέγινε η ενέργεια αυτή; Ένα μέρος δόθηκε στο σώμα Σ_2 το οποίο ανέβηκε κατά:

$$y=\Delta\ell-\Delta\ell'=0{,}4m-0{,}04m=0{,}36m$$

αυξάνοντας τη δυναμική του ενέργεια κατά:

$$\Delta U_2=m_2g\cdot y=1\cdot 10\cdot 0{,}36J=3{,}6J$$

Και το υπόλοιπο ποσό έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια των τριών σωμάτων, οπότε:

$$K_{o\lambda}=\Delta U-\Delta U_2=19{,}8J-3{,}6J=16{,}2J$$

β) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = T_1 \cdot R - T_2' \cdot R = (T_1 - T_2') \cdot R = 0$$

iv) Τη στιγμή που η ταχύτητα του Σ_2 γίνει 2m/s, την ίδια ταχύτητα έχει και το Σ_1 και την ίδια γραμμική ταχύτητα έχουν τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας. Ας εφαρμόσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, όπου το Σ_2 έχει ανέβει κατά y_1 (οπότε και το σώμα Σ_1 έχει επίσης μετατοπισθεί προς τα αριστερά κατά y_1), θεωρώντας την αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια του Σ_2 μηδενική:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$0+U_{β,1}+U_{β,2}+U_{β,τρ}+U_{ελ}=K_1+K_2+K_{τρ}+U_{β,1}+U'_{β,2}+U_{β,τρ}+U'_{ελ}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_2 g y_1 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell - y_1)^2$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{4}M\upsilon^2 + m_2 g y_1 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 - k\Delta\ell \cdot y_1$$

Με αντικατάσταση:

$$\frac{1}{2}250 \cdot y_1^2 - 100 \cdot y_1 + 10y + \frac{1}{2}\left(4+1+\frac{6}{2}\right)2^2 = 0 \rightarrow$$

$$125 \cdot y_1^2 - 90 \cdot y_1 + 16 = 0 \rightarrow$$

$$y_1 = \frac{90 \pm \sqrt{90^2 - 4 \cdot 125 \cdot 16}}{250} = \frac{90 \pm 10}{250} m \rightarrow$$

$$y_{1,1}=8/25m=0{,}32m \;και\; y_{1,2}=0{,}4m$$

α) Με βάση τα παραπάνω η δεύτερη φορά που το σώμα αποκτά την δοθείσα ταχύτητα είναι όταν y_1=0,4m, οπότε το Σ_1 έχει φτάσει στη θέση ισορροπίας του. Αλλά τότε θα ταλαντωθεί με ενέργεια:

$$K_{\tau,1} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 2^2 J = 8J$$

β) Με βάση τα παραπάνω ευρήματα, το σύστημα τίθεται σε κίνηση εξαιτίας της δύναμης του ελατηρίου, μιας μεταβλητής δύναμης, με αποτέλεσμα να μην έχουμε σταθερή επιτάχυνση, οπότε και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας δεν θα παραμένει σταθερή. Άρα το πρώτο διάγραμμα δεν είναι σωστό. Εξάλλου η επιτάχυνση του Σ_2 που μελετήσαμε μειώνεται, άρα το ίδιο θα συμβαίνει και με τη ροπή που επιταχύνει την τροχαλία, οπότε και το 3^o διάγραμμα είναι λανθασμένο. Η κλίση στο διάγραμμα L-t (ίση με την ασκούμενη ροπή) πρέπει να μειώνεται με το χρόνο, πράγμα που συμβαίνει στο 2^o και 4^o διάγραμμα. Ποιο από τα δύο;

Αν προσέξουμε το ερώτημα iii) β) βλέπουμε ότι τη στιγμή t_1 ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι μηδενικός, πράγμα που σημαίνει ότι η κλίση στο διάγραμμα L-t είναι μηδενική ή ισοδύναμα τη στιγμή αυτή η τροχαλία έχει τη μέγιστη στροφορμή της, αφού στη συνέχεια έχουμε επιβράδυνση. (Μπορούμε να εστιάσουμε και στο σώμα $Σ_1$. Για όσο διάστημα η $F_{ελ}$ έχει μεγαλύτερο μέτρο από την T_1, το σώμα επιταχύνεται, αφού στη συνέχεια επιβραδύνεται…)

Άρα σωστό είναι το τελευταίο διάγραμμα (το 4^o).

dmargaris@gmail.com