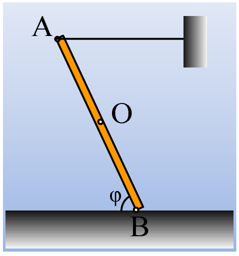
Έστω ότι συμβαίνει … άρα συμβαίνει;

Πριν λίγες μέρες έγινε μια μεγάλη συζήτηση στην ανάρτηση του Νίκου Ανδρεάδη «Με αφορμή το Δ1 του 2011». Στη συζήτηση αυτή είχα γράψει ένα σχόλιο: «Μελετώντας την, σε βλέπω να κάνεις κριτική στην ανάρτηση (και λύση), Μια δοκός ακουμπά σε κοντύτερο τοίχο....» και περίμενα μια τοποθέτηση που να αμφισβητεί τη λύση που είχα δώσει. Η τοποθέτηση δεν ήρθε, οπότε ας μιλήσουμε ξανά πάνω στον τρόπο μιας απόδειξης και κατά πόσο είναι αποδεκτή.

Ας πάρουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Μια ομογενής δοκός μάζας Μ=10kg και μήκους ℓ=4m ισορροπεί όπως στο σχήμα, δεμένη με νήμα, ενώ στηρίζεται στο έδαφος, σχηματίζοντας γωνία φ=60° με την οριζόντια διεύθυνση. Η δοκός παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0{,}5$. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να βρεθούν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο και η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος.



Δίνεται για τη δοκό $I_{cm}=\frac{1}{12}M\ell^2$ και g=10m/s^2.

(Η άσκηση ουσιαστικά είναι η ανάρτηση του Δημήτρη Αναγνώστου «Και τώρα κάτι διαφορετικό (ίσως και πρωτότυπο:-)!): Δοκός, ισορροπία, σύνθετη κίνηση και δύο συντελεστές τριβής », την οποία ας χρησιμοποιήσουμε σαν βάση της παραπέρα συζήτησης).

Απάντηση:

Μόλις κοπεί το νήμα η δοκός θα κινηθεί. Το ερώτημα που ανακύπτει είναι αν θα ολισθήσει ή όχι το άκρον της Β, αμέσως μόλις κόψουμε το νήμα. Αυτό δεν είναι δεδομένο και γνωστό, οπότε είμαστε υποχρεωμένοι να δουλέψουμε ξεκινώντας με μια υπόθεση. Ποια;

Υπάρχουν δυο εναλλακτικοί τρόποι να προχωρήσουμε:

1^{ος} τρόπος.

Έστω ότι η δοκός δεν θα ολισθήσει.

Η υπόθεση αυτή θα είναι σωστή, αν υπολογίσουμε την τριβή που θα ασκηθεί και βρεθεί να είναι στατική. Αν συμβεί αυτό, τότε θεωρούμε ότι η υπόθεσή μας ευσταθεί και η δοκός δεν ολισθαίνει. Σε αντίθετη περίπτωση θα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο και θα πρέπει να λύσουμε ξανά την άσκηση, παίρνοντας πλέον σαν δεδομένο την ολίσθηση του άκρου Β.

2^{ος} τρόπος.

Έστω ότι η δοκός ολισθαίνει, αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος.

Στην περίπτωση αυτή θα πάρουμε την τριβή σαν τριβή ολίσθησης. Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε στο να βρούμε την ταχύτητα του άκρου Β, οπότε αν βρούμε ταχύτητα διάφορη του μηδενός και συμβατή με τις υποθέσεις που θα έχουμε κάνει, τότε η υπόθεση θα είναι σωστή, διαφορετικά, θα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο, δηλαδή στην μη ολίσθηση του άκρου Β. Συνεπώς και τώρα, θα πρέπει να λυθεί ξανά η άσκηση με δεδομένο πλέον, την μη ολίσθηση του άκρου Β.

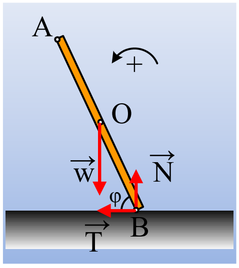
Ποια μέθοδος είναι επιστημονικά σωστή; Δεν ξέρω αν η δοκός ολισθήσει ή όχι. Κάνω μια υπόθεση. Επιλέγω το ένα από τα δύο πιθανά ενδεχόμενα και ψάχνω. Αν οδηγηθώ σε άτοπο, νομίζω ότι όλοι συμφωνούμε ότι η απόδειξη είναι επιστημονικά σωστή.

Αλλά αν δεν προκύψει άτοπο, δεν είναι ισχυρή;

Ας το δούμε αναλυτικά:

1ος τρόπος:

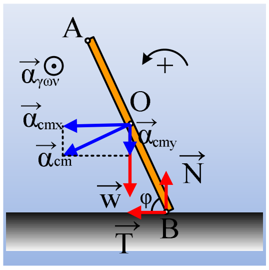
Έστω ότι η δοκός δεν ολισθαίνει. Τότε η ταχύτητα του άκρου Β είναι μηδενική και μπορώ να δεχθώ ότι η δοκός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στη δοκό, που περνά από το άκρο Β. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4}\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell}\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{15}{8}rad/s^2$$

$$\text{Οπότε και } a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2} = \frac{15}{4}m/s^2$$



$$\text{Αλλά } \Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cmx} \rightarrow T = M\cdot\alpha_{cmx} = Ma_{cm}\cdot\eta\mu\varphi = 10\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{4}N = 32{,}5N$$

$$\text{Ενώ } \Sigma F_y = M\alpha_{cmy} \rightarrow Mg - N = Ma_{cm}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow N = Mg - Ma_{cm}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow$$

$$N = Mg - Ma_{cm}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = 100 - 10\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{2}N = 81{,}25N$$

Εξετάζουμε τώρα αν αυτή η τριβή που υπολογίσαμε παραπάνω, μπορεί να υπάρξει ή όχι.

Η μέγιστη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει η τριβή είναι $T_{o\rho} = \mu_s\cdot N = 0{,}5\cdot 81{,}25N = 40{,}6N$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η τριβή που θα ασκηθεί με βάση την δυναμική της κίνησης είναι μικρότερη από την μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να ασκηθεί, συνεπώς η υπόθεσή μας ευσταθεί και τα αποτελέσματα που βρήκαμε γίνονται αποδεκτά.

2ος τρόπος:

Έστω ότι το άκρον Β θα κινηθεί οπότε η τριβή που θα ασκηθεί θα είναι τριβή ολίσθησης.

Εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα για την κίνηση της δοκού:

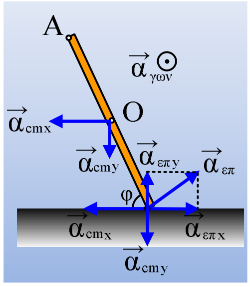
$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cmx} \rightarrow T = M\cdot\alpha_{cmx} = Ma_{cmx} \rightarrow \mu N = Ma_{cmx} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = M\alpha_{cmy} \rightarrow Mg - N = Ma_{cmy} \quad (2)$$

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow N\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - T\cdot\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi = \left(\frac{1}{12}M\ell^2\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu N\cdot\eta\mu\varphi = \frac{1}{6}M\ell a_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Το άκρον Β όμως θα έχει οριζόντια επιτάχυνση προς τα δεξιά με μέτρο:



$$\alpha_B = \alpha_{\varepsilon\pi x} - \alpha_{cmx} \rightarrow a_{cmx} = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi - a_B \quad (4)$$

$$\text{ενώ } a_{cmy} = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

οπότε η (2) γίνεται: $Mg - N = Ma_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (2^{\alpha})$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (2^{α}) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{Mg - N}{N(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)} = \frac{Ma_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi}{\frac{1}{6}M\ell a_{\gamma\omega\nu}} = 3\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow$$

$$N = \frac{Mg}{1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)} \quad (5)$$

Αλλά τότε από την (3):

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{6g(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)}{\ell(1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi))} \quad (6)$$

Και από την (1) με τη βοήθεια της (5) παίρνουμε:

$$a_{cmx} = \frac{\mu g}{1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)} \quad (7)$$

Συνεπώς η (4) δίνει:

$$a_B = a_{\gamma\omega\nu}\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi - a_{cmx} = \frac{6g(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)}{\ell(1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi))}\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi - \frac{\mu g}{1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)} \rightarrow$$

$$a_B = \frac{g[3\eta\mu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi) - \mu]}{1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)}$$

$$a_B = \frac{g[3\eta\mu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi) - \mu]}{1 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\cdot\eta\mu\varphi)} = \frac{10\left[3\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - 0{,}5\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0{,}5\right]}{1 + 3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0{,}5\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -0{,}3m/s^2$$

Δηλαδή έχει επιτάχυνση προς τα αριστερά. Αλλά τότε θα έπρεπε να δέχεται τριβή προς τα δεξιά και το άκρο Β να κινηθεί προς τα αριστερά!!! Προφανώς φτάσαμε σε άτοπο, οπότε πρέπει να επιλυθεί η άσκηση με βάση τον 1ο τρόπο.

Και τώρα ας θέσουμε ξανά το ερώτημα:

Ο 1ος τρόπος είναι ή όχι αποδεικτικός της μη ολίσθησης του άκρου Β και η αντίστοιχη λύση είναι σωστή;

Ή πρέπει να επιβληθεί ο 2ος τρόπος αντιμετώπισης, δηλαδή **μόνο αν βρούμε τρόπο να καταλήξουμε σε άτοπο,** έχουμε αποδείξει τι πράγματι θα συμβεί και μετά να επιλύσουμε το πρόβλημα;

Ας λάβουμε υπόψη και κάτι τελευταίο. Δεν μιλάμε ότι ξεκινάμε από μια υπόθεση η οποία μπορεί να οδηγεί σε πολλά ενδεχόμενα, αλλά μόνο σε δύο. Σε δύο ενδεχόμενα αλληλοαποκλειόμενα. Αν απαντήσουμε θετικά ή αρνητικά στο ένα ενδεχόμενο, δεν καλύπτουμε το άλλο;

dmargaris@sch.gr