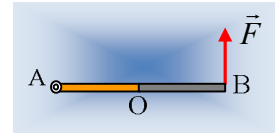


## Τι γίνεται στην ένωση δύο ράβδων;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα στερεό AB, το οποίο μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο A και το οποίο αποτελείται από δυο ομογενείς ράβδους AO και OB με ίδιο μήκος  $l$  και μάζας  $m$  και  $M$ . Κάποια στιγμή ασκούμε στο άκρο B μια οριζόντια δύναμη  $F$  στο άκρο B, κάθετη στη ράβδο.



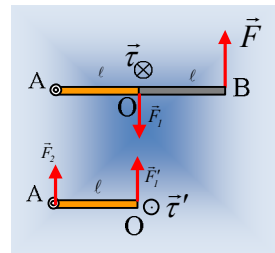
Αμέσως μετά η ράβδος AO:

- α) Δέχεται δύναμη από την ράβδο OB ίδιας φοράς με την  $F$ .
- β) Δέχεται δύναμη από την ράβδο OB αντίθετης φοράς από την  $F$ .
- γ) Εξαρτάται.

Ποια είναι η φορά της ροπής ζεύγους η οποία ασκείται στη ράβδο AO, λόγω αλληλεπίδρασης με την OB;

### Απάντηση:

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε ράβδο (υποθέτουμε αυτές τις φορές για δυνάμεις και ροπές).



Η ροπή αδράνειας του στερεού είναι:

$$I = \frac{1}{3}m\ell^2 + \left( \frac{1}{12}M\ell^2 + Md^2 \right) = \frac{1}{3}m\ell^2 + \left( \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{3\ell}{2}\right)^2 \right) \rightarrow$$

$$I = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{7}{3}M\ell^2 = \frac{1}{3}(m+7M)\ell^2$$

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F\ell}{\frac{1}{3}(m+7M)\ell^2} \rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{6F}{(m+7M)\ell}$$

Αλλά ο 2<sup>ος</sup> νόμος για το cm της ράβδου OB δίνει:

$$\Sigma F = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F + F_1 = M \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{3\ell}{2} \rightarrow$$

$$F_1 = M \frac{6F}{(m+7M)\ell} \cdot \frac{3\ell}{2} - F \rightarrow$$

$$F_1 = \frac{2M-m}{m+7M} F$$

Ας διερευνήσουμε λίγο ακόμη την κατάσταση.

1) Αν  $2M > m$  τότε  $F_1 > 0$ , η δύναμη δηλαδή που δέχεται η OB από την ράβδο AO, έχει την ίδια κατεύθυνση με την δύναμη F (αντίθετη από αυτή που σχεδιάστηκε στο σχήμα.

Αλλά τότε εφαρμόζοντας για την ράβδο OB ξανά το 2<sup>ο</sup> νόμο για τη στροφική της κίνηση έχουμε:

$$\Sigma \tau_2 = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow \tau + F \cdot \frac{\ell}{2} - F_1 \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot \frac{6F}{(m+7M)\ell} \rightarrow$$

$$\tau = -\frac{2M+m}{(m+7M)} \cdot F \ell$$

Η κατάσταση δηλαδή είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

2) Αν  $2M = m$ , τότε  $F_1 = 0$ , δηλαδή η μια ράβδος δεν ασκεί δύναμη στην άλλη, ενώ για τις ροπές θα έχουμε:

$$\Sigma \tau_2 = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow \tau + F \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot \frac{6F}{(m+7M)\ell} \rightarrow$$

$$\tau = -\frac{6M+m}{2(m+7M)} \cdot F \ell$$

Εικόνα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

3) Αν  $2M < m$  τότε  $F_1 < 0$ , η δύναμη δηλαδή  $F_1$  έχει αντίθετη φορά από την ασκούμενη δύναμη F, με μέτρο  $F_1 = \frac{m-2M}{m+7M} F$ , Παίρνοντας ξανά το 2<sup>ο</sup> νόμο για τη στροφική κίνηση της ράβδου OB, έχουμε:

$$\Sigma \tau_2 = I_{cm} \cdot \alpha_{γων} \rightarrow \tau + F \cdot \frac{\ell}{2} + F_1 \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} M \ell^2 \cdot \frac{6F}{(m+7M)\ell} \rightarrow$$

$$\tau = -\frac{2M+m}{(m+7M)} \cdot F \ell$$

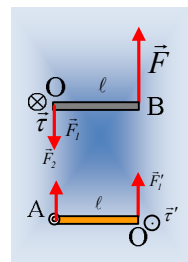
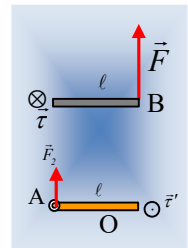
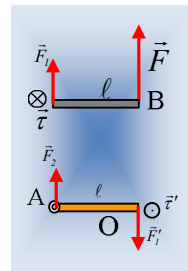
Η κατάσταση δηλαδή είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι και στις τρεις περιπτώσεις το ζεύγος των δυνάμεων, δημιουργεί ροπή της ίδιας κατεύθυνσης.

Αλλά και το μέτρο αυτής της ροπής είναι το ίδιο, στην 1<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> περίπτωση. Μόνο στη 2<sup>η</sup> που δεν υπάρχει δύναμη μεταξύ των δύο ράβδων, «το βάρος» επιτάχυνσης της ράβδου AO, το «σηκώνει» μόνη της η ροπή...

### Αριθμητικά παραδείγματα:

1) Αν  $M=2\text{kg}$  και  $m=1\text{kg}$ ,  $l=1\text{m}$  και  $F=15\text{N}$ , τότε:



$$F_l = \frac{2M - m}{m + 7M} F = \frac{4 - 1}{1 + 14} 15N = 3N \quad \text{και} \quad \tau = -\frac{2M + m}{(m + 7M)} \cdot F\ell = -5N \cdot m$$

2) Αν  $M=0,5\text{kg}$  και  $m=1\text{kg}$ ,  $l=1\text{m}$  και  $F=15\text{N}$ , τότε:

$$F_l = \frac{2M - m}{m + 7M} F = 0 \quad \text{και} \quad \tau = -\frac{6M + m}{2(m + 7M)} \cdot F\ell = -\frac{20}{3} N \cdot m$$

3) Αν  $M=1\text{kg}$  και  $m=3\text{kg}$ ,  $l=1\text{m}$  και  $F=15\text{N}$ , τότε:

$$F_l = \frac{2M - m}{m + 7M} F = -1,5N \quad \text{και} \quad \tau = -\frac{2M + m}{(m + 7M)} \cdot F\ell = -7,5N \cdot m$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)