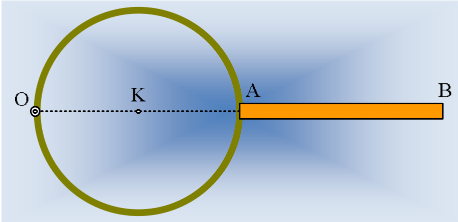
Ο δακτύλιος και η ράβδος σαν στερεό



Έχουμε κατασκευάσει ένα στερεό s με συγκόλληση ενός δακτυλίου μάζας m και ακτίνας R και μιας ομογενούς ράβδου ΑΒ μήκους l=2R και μάζας M=3m, όπως στο διπλανό σχήμα. Το στερεό s, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Ο, αντιδιαμετρικό του σημείου Α που έχει συγκολληθεί η ράβδος. Το στερεό συγκρατείται σε τέτοια θέση που η ράβδος να είναι οριζόντια.

i) Η ροπή αδράνειας του στερεού s ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο έχει τιμή:

α) $I_A = 20mR^2$, β) $I_A = 25mR^2$, γ) $I_A = 30mR^2$, δ) $I_A = 35mR^2$.

ii) Αφήνουμε το στερεό να κινηθεί σε κατακόρυφο επίπεδο. Η αρχική επιτάχυνση του άκρου Β της ράβδου έχει μέτρο:

α) $\alpha_B < g$, β) $\alpha_B = g$, γ) $\alpha_B > g$.

iii) Η μέγιστη κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει κατά την παραπάνω κίνηση ο δακτύλιος είναι:

α) $K_{max} < mgR$, β) $K_{max} = mgR$, γ) $K_{max} > mgR$.

Δίνεται ότι ο μάζα του δακτυλίου θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, ενώ η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το ένα της άκρο $I_B = ml^2/3$.

Απάντηση:

i) Η ροπή αδράνειας του στερεού, ίση με το άθροισμα των δύο επιμέρους ροπών αδράνειας δακτυλίου-ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο, είναι:

$$I_o = I_\delta + I_\rho = \left(I_{cm,\delta} + mR^2\right) + \left(I_{cm,\rho} + md^2\right)$$

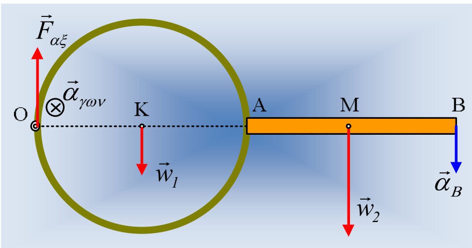
Αλλά η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς άξονα που περνά από το άκρο της Β είναι ίση (θεώρημα Steiner):

$$I_B = I_{cm,\rho} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \rightarrow I_{cm,\rho} = \frac{1}{3}M\ell^2 - \frac{1}{4}M\ell^2 = \frac{1}{12}M\ell^2, \text{ οπότε:}$$

$$I_o = \left(mR^2 + mR^2\right) + \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M(3R)^2\right) \rightarrow$$

$$I_o = 2mR^2 + \left(\frac{1}{12}3m\cdot 4R^2 + 3m\cdot 9R^2\right) = 30mR^2.$$

Σωστό το γ).



ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s, μόλις αφεθεί να κινηθεί. Θεωρώντας ως θετική την ωρολογιακή φορά, έχουμε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

$$\Sigma\tau_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow mgR + Mg \cdot 3R = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

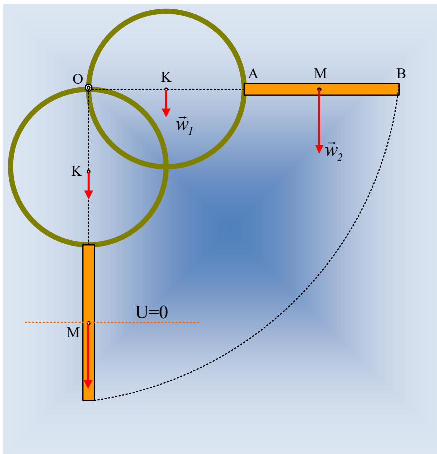
$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{10mgR}{30mR^2} = \frac{g}{3R}$$

Έτσι το άκρο Β της ράβδου θα έχει κατακόρυφη επιτάχυνση, όπως στο παραπάνω σχήμα, μέτρου:

$$\alpha_B = \alpha_{\gamma\omega\nu} r = \frac{g}{3R} \cdot 4R = \frac{4}{3} g$$

Σωστό το γ)

iii) Το στερεό επιταχύνεται εξαιτίας της ροπής των δύο βαρών, συνεπώς θα αποκτήσει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα στη θέση που η ΟΒ γίνει κατακόρυφη. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ της οριζόντιας και κατακόρυφης θέσης της ράβδου παίρνουμε (θεωρούμε U=0 το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το μέσον Μ της ράβδου στην κατακόρυφη θέση).



$$K_o + U_o = K_\kappa + U_\kappa \rightarrow$$

$$0 + mg \cdot 3R + Mg \cdot 3R = \tfrac{1}{2} I_o \cdot \omega^2 + mg \cdot 2R \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} I_o \cdot \omega^2 = 10mgR \rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{20mgR}{I_o} = \frac{20mgR}{30mR^2} = \frac{2g}{3R}$$

Οπότε η μέγιστη κινητική ενέργεια του δακτυλίου είναι ίση:

$$K_{\delta,max} = \frac{1}{2} I_{\delta,o} \omega^2 = \frac{1}{2} 2mR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} 2mR^2 \cdot \frac{2g}{3R} = \frac{2}{3} mgR$$

Σωστό το α).

dmargaris@gmail.com