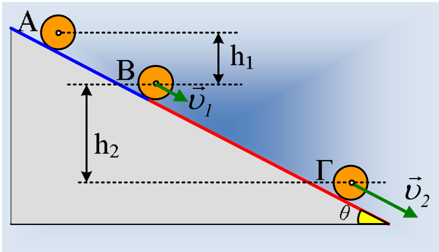
Μια σφαίρα σε κεκλιμένο επίπεδο



Μια ομογενής σφαίρα μάζας m=14kg και ακτίνας R=0,1m, αφήνεται να κινηθεί στο σημείο Α του κεκλιμένου επιπέδου του σχήματος και τη στιγμή t_1, περνά με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_1=5m/s από τη θέση Β, όπου διαφοροποιείται η φύση του επιπέδου (διαφορετικός συντελεστής τριβής…), φτάνοντας στη συνέχεια στη θέση Γ, με αντίστοιχη ταχύτητα υ_2=10m/s. (Στο σχήμα, βλέπετε με μπλε γραμμή το πρώτο μέρος του κεκλιμένου επιπέδου και με κόκκινη, το υπόλοιπο).

i) Αν στο πρώτο τμήμα του επιπέδου, από τη θέση Α μέχρι τη θέση Β η σφαίρα κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), να βρεθεί η κατακόρυφη απόσταση h_1, μεταξύ των δύο θέσεων.

ii) Αν η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σημείων Β και Γ είναι h_2=3,75m, να υπολογιστεί η αύξηση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας μεταξύ των δύο αυτών θέσεων.

iii) Αν η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι θ=30°, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της, που περνά από το κέντρο της Ο, για την κίνηση:

α) Από το Α στο Β,

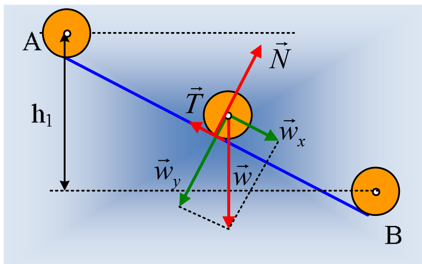
β) Από το Β στο Γ.

iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή της σφαίρας, ως προς τον ίδιο άξονα, τις χρονικές στιγμές:

α) $t_2=t_1-1s$ και β) $t_3=t_1+1s$

Δίνεται g=10m/s^2 και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της I=(2/5)mR^2.

Απάντηση:



i) Κατά την κύλιση της σφαίρας από το Α στο Β, η ασκούμενη τριβή είναι στατική, οπότε η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια μηδενική στη θέση Β, παίρνουμε:

$$K_A+U_A=K_B+U_B \rightarrow$$

$$0+mgh_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2+0 \rightarrow$$

$$mgh_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_1^2 \rightarrow mgh_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{5}m\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$h_1=\frac{7\upsilon_1^2}{10g}=\frac{7\cdot 5^2}{10\cdot 10}m=\frac{7}{4}m=1{,}75m$$

ii) Θεωρώντας τώρα επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση Γ, η σφαίρα κατά την κίνησή της από το Β στο Γ, παρουσιάζει **μείωση** δυναμικής ενέργειας:

$$U_B\text{-}U_\Gamma = U_B = mgh_2 = 14\cdot 10\cdot 3{,}75J = 525J.$$

Η αντίστοιχη **αύξηση** της κινητικής ενέργειας είναι ίση:

$$\Delta K = K_\Gamma\text{-}K_B = \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2\right) = \left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2\right) - \left(\frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2\right) (1)$$

Αλλά $\left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2\right) = \frac{1}{2}14\cdot 10^2 J - \frac{1}{2}14\cdot 5^2 J = 525J$

Ίση δηλαδή με την αντίστοιχη μείωση της δυναμικής ενέργειας!

Οπότε από την (1) $\left(\frac{1}{2}I_{cm}\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2\right) = 0 \rightarrow \omega_2 = \omega_1$

Κατά την κίνηση δηλαδή από τη θέση Β στη θέση Γ η γωνιακή ταχύτητα δεν άλλαξε, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπήρχε κάποια ροπή που να επιτάχυνε στροφικά τη σφαίρα, συνεπώς η τριβή μηδενίζεται. Το δεύτερο δηλαδή τμήμα του επιπέδου ήταν λείο. Οπότε τελικά έχουμε:

$$\Delta K_{B\Gamma} = 525J.$$

iii) Κατά την κίνηση από το Α στο Β, θεωρώντας την κίνηση ως σύνθετη μια μεταφορά και μια περιστροφή γύρω από μια οριζόντια διάμετρο της, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, παίρνουμε από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα:

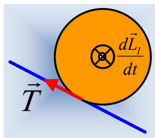
Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta - T_s = m\cdot\alpha_{cm}$ (2)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s\cdot R = \frac{2}{5}mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s = \frac{2}{5}m\cdot\alpha_{cm}$ (3)

Αφού έχουμε κύλιση και $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$. Οπότε με πρόσθεση των (2) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{7}g\cdot\eta\mu\theta \rightarrow T_s = \frac{2}{7}m\cdot g\cdot\eta\mu\theta = \frac{2}{7}14\cdot 10\cdot\frac{1}{2} = 20N$$

α) Θεωρώντας τη δεξιόστροφη ροπή ως θετική, έχουμε για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής της σφαίρας, μεταξύ των θέσεων Α και Β, έχουμε:



$$\frac{dL_1}{dt} = \Sigma\tau = T\cdot R = 20\cdot 0{,}1kgm^2/s^2 = 2kgm^2/s^2.$$

Με διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής, οριζόντια κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα.

β) Για την κίνηση από το Β στο Γ, δεν ασκείται δύναμη τριβής στη σφαίρα, με αποτέλεσμα η στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής, να παραμένει σταθερή, οπότε:

$$\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau = 0$$

iv) Τη στιγμή t_1 που η σφαίρα περνά από το σημείο Β, έχει στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής της, κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L_1 = I_{cm}\omega = \frac{2}{5}mR^2\omega_1 = \frac{2}{5}mRυ_1 = \frac{2}{5}14 \cdot 0{,}1 \cdot 5kgm^2/s = 2{,}8kgm^2/s.$$

α) Μεταξύ των θέσεων Α και Β, προηγουμένως δείξαμε ότι έχουμε σταθερό ρυθμό μεταβολής στροφορμής, οπότε (t_1 τελική και t_2 αρχική στιγμή) :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_1 - L_2}{t_1 - t_2} \to L_2 = L_1 - \left(\frac{dL}{dt}\right)(t_1 - t_2) \to$$

$$L_2 = L_1 - \left(\frac{dL}{dt}\right)(t_1 - t_2) = 2{,}8kgm^2/s - 2 \cdot 1kgm^2/s = 0{,}8kgm^2/s.$$

β) Για την κίνηση από το Β στο Γ η στροφορμή της σφαίρας, ως προς τον άξονα περιστροφής της, παραμένει σταθερή, οπότε:

$$L_3 = L_1 = 2{,}8kgm^2/s.$$

dmargaris@gmail.com