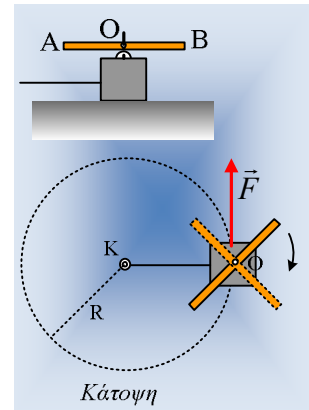


Μια σανίδα περιστρέφεται μαζί με τη βάση

Μια λεπτή ομογενής σανίδα AB μήκους 2m και μάζας $m=3\text{kg}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της O και ο οποίος στηρίζεται σε βάση μάζας M, η οποία ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο (πάνω σχήμα). Η βάση έχει προσδεθεί στο άκρο νήματος, μήκους $l_1=2\text{m}$ το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο K. Θέτουμε τη σανίδα σε περιστροφή, με ωρολογιακή φορά και με γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\text{rad/s}$. Στη συνέχεια ασκώντας στη βάση σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη $F=5\text{N}$, η διεύθυνση της οποίας παραμένει διαρκώς κάθετη στο νήμα, την θέτουμε σε κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο K, μέχρι να διατρέξει (η βάση) μήκος τόξου $s=16\text{m}$ αποκτώντας ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$. Τη στιγμή αυτή η δύναμη παύει να ασκείται. Να υπολογιστούν:



- i) Το έργο της δύναμης F και η αύξηση της κινητικής ενέργειας της σανίδας εξαιτίας της κίνησης της βάσης στηρίζης της.
- ii) Η μάζα M της βάσης.
- iii) Η τελική στροφορμή της σανίδας ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της O.
- iv) Η τελική στροφορμή της σανίδας ως προς το κέντρο K περιστροφής.
- v) Η ολική στροφορμή του συστήματος βάση-σανίδα ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο K της κυκλικής τροχιάς.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = (1/12)m l^2$.

Απάντηση:

- i) Η ασκούμενη δύναμη είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά. Για κάθε στοιχειώδη μετατόπιση Δs το έργο της θα είναι $\Delta W = F \cdot \Delta s$, οπότε το ολικό έργο που παράγει θα είναι:

$$W = \sum \Delta W = \sum F \cdot \Delta s = F \cdot \sum \Delta s = F \cdot s = 5 \cdot 16 \text{J} = 80 \text{J}.$$

Η σανίδα, αρχικά είχε κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας της,

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 \text{ και τελικά } K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2, \text{ όπου } v_{\text{cm}} = v_{\beta} = v_1, \text{ αφού η άσκηση της δύναμης } F$$

δεν προκάλεσε κάποια αλλαγή στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της. Συνεπώς έχουμε αύξηση της κινητικής της ενέργειας κατά:

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 \text{J} = 24 \text{J}$$

- ii) Το έργο της ασκούμενης δύναμης F , είναι ίσο με την ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα και του αύξησε την κινητική ενέργεια. Αλλά τότε, το έργο αυτό, είναι ίσο με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος βάση-σανίδα. Αλλά αφού η σανίδα κέρδισε ενέργεια $24J$, η βάση απέκτησε κινητική ενέργεια:

$$K_\beta = \frac{1}{2} M v_1^2 = W_F - \Delta K_\sigma = 80J - 24J = 56J \rightarrow$$

$$M = \frac{2K_\beta}{v_1^2} = \frac{2 \cdot 56}{4^2} kg = 7kg$$

- iii) Η στροφορμή της σανίδας ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από τον άξονα περιστροφής της, στο μέσον της O , είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$L_{\sigma,O} = L_{cm} = I_{cm} \omega = \frac{1}{12} m \ell^2 \cdot \omega = \frac{1}{12} 3 \cdot 2^2 \cdot 2 kgm^2 / s = 2 kgm^2 / s.$$

Η στροφορμή αυτή, λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας, ονομάζεται και ιδιοστροφορμή (ή spin) και είναι ανεξάρτητη του σημείου (ή του άξονα) ως προς το οποίο μας ζητάνε τη στροφορμή.

- iv) Ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς K , η σανίδα εκτός της παραπάνω ιδιοστροφορμής έχει και τροχιακή στροφορμή, κατακόρυφη, με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$L_{\sigma,K,τρ} = m v R = m v_1 \ell_1 = 3 \cdot 4 \cdot 2 kgm^2 / s = 24 kgm^2 / s.$$

Αλλά τότε η συνολική στροφορμή της σανίδας ως προς το κέντρο K της κυκλικής τροχιάς, είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω (βλέπε παραπάνω σχήμα) και με μέτρο:

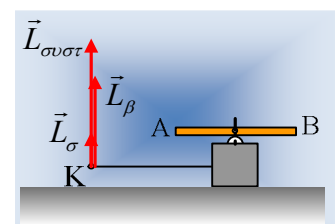
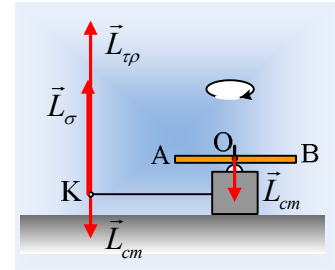
$$L_{\sigma,K,τρ} = L_{\sigma,K,τρ} - L_{cm} = 24 kgm^2 / s - 2 kgm^2 / s = 22 kgm^2 / s.$$

- v) Η βάση, ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το K , έχει στροφορμή πάνω στον άξονα με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$L_\beta = M v R = M v_1 \ell_1 = 7 \cdot 4 \cdot 2 kgm^2 / s = 56 kgm^2 / s.$$

Αλλά τότε το σύστημα σανίδα-βάση ως προς τον ίδιο άξονα, θα είναι το διανυσματικό διάγραμμα των στροφορμών σανίδας και βάσης, το οποίο θα δίνει επίσης κατακόρυφη στροφορμή με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$L_{\sigma\sigma\sigma} = L_\sigma + L_\beta = 22 kgm^2 / s + 56 kgm^2 / s = 78 kgm^2 / s.$$



dmargaris@gmail.com