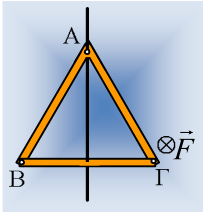
Η περιστροφή ενός τριγώνου



Τρεις ομογενείς ράβδοι, μήκους l=2m και μάζας 3kg η καθεμιά, συνδέονται, δημιουργώντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευρά l. Το τρίγωνο αυτό (στερεό s) μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από την κορυφή Α και το μέσον της ΒΓ, όπως στο σχήμα.

i) Αν I_o η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον, να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ΑΒ ως προς τον κατακόρυφο άξονα z, δίνεται από την σχέση:

$$I_z=4I_o\cdot ημ^2θ.$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα.

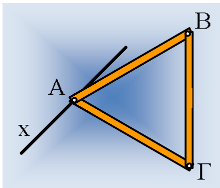
ii) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα z.

iii) Θέτουμε τη στιγμή $t_0=0$, το στερεό σε περιστροφή ασκώντας στην κορυφή Γ, οριζόντια δύναμη μέτρου F=2,4N, κάθετη στην πλευρά ΒΓ, με φορά προς τα μέσα στο σχήμα.

Να υπολογιστούν τη χρονική στιγμή $t_1=5s$:

α) Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού s και η στροφορμή του κατά (ως προς) τον άξονα z.

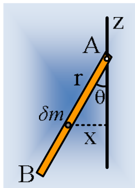
β) Η κινητική ενέργεια του στερεού, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.



iv) Σταματάμε την περιστροφή και αφαιρούμε τον άξονα z. Περνάμε την κορυφή Α σε δεύτερο οριζόντιο άξονα x, κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου, γύρω από τον οποίο το στερεό s μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Φέρνουμε το στερεό σε τέτοια θέση ώστε η πλευρά ΒΓ να είναι κατακόρυφη και το αφήνουμε να κινηθεί. Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση (μέτρο και κατεύθυνση) της κορυφής Β.

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_o= (1/12)ml^2$.

Απάντηση:



i) Έστω μια στοιχειώδης μάζα δm της ράβδου η οποία απέχει κατά x από τον άξονα z. Η ροπή αδράνειας της μάζας αυτής θα είναι $I_{δm}=δm\cdot x^2$. Αλλά x=r·ημθ, όπου r η απόσταση της μάζας από το άκρο Α της ράβδου. Αλλά τότε η συνολική ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα z θα είναι ίση:

$$I_{ρ,z}=\sum I_{δm}=\sum\left(δm\cdot r^2\cdot ημ^2θ\right)=ημ^2θ\sum\left(δm\cdot r^2\right)=ημ^2θ\cdot I_A$$

Όπου I_A η ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το άκρο Α της ράβδου. Αλλά από Steiner:

$$I_A=I_{cm}+m\cdot d^2=\frac{1}{12}m\ell^2+m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=\frac{1}{3}m\ell^2=4I_o\text{, οπότε:}$$

$$I_{\rho,z} = 4I_o \cdot \eta\mu^2\theta$$

ii) Για την ροπή αδράνειας του τριγώνου (στερεό s) ως προς τον άξονα z έχουμε:

$$I_z = I_{AB} + I_{A\Gamma} + I_{B\Gamma} = 2I_{AB} + I_{B\Gamma} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{12} m\ell^2 \cdot \eta\mu^2\theta + \frac{1}{12} m\ell^2$$

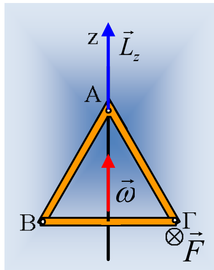
$$I_z = \frac{1}{12} m\ell^2 \left(1 + 8\eta\mu^2\theta\right) = \frac{1}{12} 3 \cdot 2^2 \left(1 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) kgm^2 = 3kgm^2.$$

iii) Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση του στερεού s παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_z = I_z a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot \frac{\ell}{2} = I_z a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F\ell}{2I_z} = \frac{2{,}4 \cdot 2}{2 \cdot 3} rad/s^2 = 0{,}8 rad/s^2$$

α)Αλλά τότε το στερεό εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση και τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα και στροφορμή:



$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 0{,}8 \cdot 5 rad/s = 4 rad/s$$

$$L_z = I_z \cdot \omega = 3 \cdot 4 kgm^2/s = 12\ kgm^2/s.$$

Και τα δυο παραπάνω μεγέθη είναι διανύσματα πάνω στον άξονα με φορά προς τα πάνω, όπως στο διπλανό σχήμα.

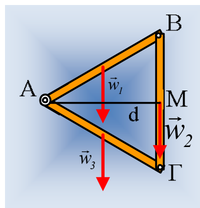
β) Η κινητική ενέργεια τη στιγμή t_1 είναι ίση:

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 4^2 J = 24J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της:

$$\frac{dK}{dt} = P_\tau = \tau\omega = F \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \omega = 2{,}4 \cdot \frac{2}{2} \cdot 4 J/s = 9{,}6 J/s$$

iv) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα βάρη των τριών ράβδων και η διάμεσος (και ύψος) ΑΜ του τριγώνου. Από το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:



$$d = \sqrt{(AB)^2 - (BM)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Ενώ ο μοχλοβραχίονας της ροπής των w_1 και w_3 είναι ίσος με d/2 (γιατί;). Αλλά τότε θεωρώντας την ωρολογιακή φορά περιστροφής ως θετική, έχουμε:

$$\Sigma\tau = w_1 \cdot (d/2) + w_2 \cdot d + w_3 \cdot (d/2) = 2mg \cdot d$$

Ενώ η ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνά από την κορυφή Α, είναι:

$$I_z = I_{AB} + I_{A\Gamma} + I_{B\Gamma} = 2I_{AB} + I_{B\Gamma} = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{1}{4} m\ell^2\right) + \left(\frac{1}{12} m\ell^2 + md^2\right) \rightarrow$$

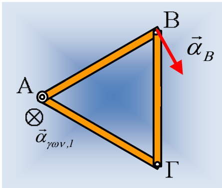
$$I_z = \frac{3}{2}m\ell^2$$

Εφαρμόζοντας ξανά το 2ο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε:

$$\Sigma\tau_x = I_x a_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow 2mgd = \frac{3}{2}m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow$$

$$2mg\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{2g\sqrt{3}}{3\ell}$$

Αλλά τότε η κορυφή Β έχει «επιτρόχια» επιτάχυνση μέτρου



$$\alpha_B = a_{\gamma\omega\nu,1}\cdot\ell = \frac{2g\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3}m/s^2$$

Κάθετη στην ΑΒ, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com