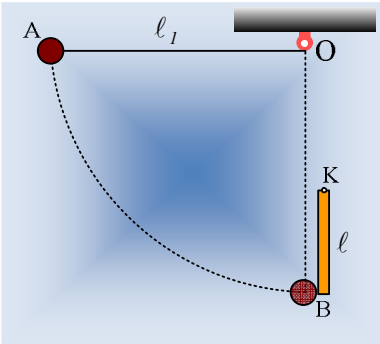
Η κρούση και η διατήρησης της στροφορμής



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=1kg, την οποία θεωρούμε υλικό σημείο, κρέμεται στο άκρο αβαρούς νήματος μήκους l_1=5m, από σταθερό σημείο Ο. Στην ίδια κατακόρυφο ισορροπεί μια ομογενής ράβδος ΚΒ, μήκους l=2m και μάζας M=6kg, όπου το άκρο της Β εφάπτεται της σφαίρας. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρον της Κ.

Μετακινούμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση Α, όπου το νήμα είναι τεντωμένο και οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Φτάνοντας στην κατακόρυφο, συγκρούεται με το άκρο της ράβδου και αμέσως μετά, κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ_1=2m/s.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση, καθώς και η μεταβολή της ορμής της, η οποία οφείλεται στην κρούση.

ii) Θέλουμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα την οποία αποκτά η ράβδος λόγω της κρούσης. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα, ως προς οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά:

α) Από το σημείο Ο,

β) από το σημείο Κ περιστροφής της ράβδου,

γ) από το μέσον Μ της ράβδου.

Να δικαιολογήσετε με ποιον ή ποιους από τους παραπάνω άξονες, μπορείτε να δουλέψετε και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της ράβδου, η οποία οφείλεται στην κρούση. Η ορμή του συστήματος σφαίρα-ράβδος διατηρήθηκε κατά την κρούση αυτή;

iv) Να υπολογιστεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση.

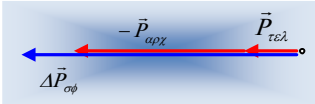
Δίνεται g=10m/s^2 ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της I= 1/3 Ml^2.

Απάντηση:

i) Κατά την πτώση της σφαίρας από το σημείο Α, μέχρι τη θέση σύγκρουσης με τη ράβδο μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο, είναι το βάρος, μια συντηρητική δύναμη. Εφαρμόζοντας τη ΑΔΜΕ από τη θέση που αφήνεται να κινηθεί, μέχρι ελάχιστα πριν την κρούση, θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια στη θέση Β, παίρνουμε:

$$mg\ell = ½\, m\upsilon^2 \rightarrow \upsilon = \sqrt{2g\ell} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5}\, m/s = 10\, m/s$$

Για τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας στη διάρκεια της κρούσης έχουμε:

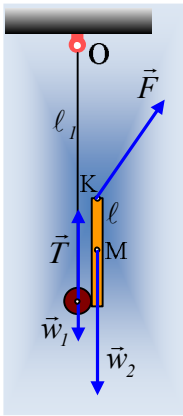


$$\Delta\vec{P}_{\sigma\phi} = \vec{P}_{\tau\epsilon\lambda} - \vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\epsilon\lambda} + \left(-\vec{P}_{\alpha\rho\chi}\right)$$

Θεωρώντας δε τη δεξιά κατεύθυνση ως θετική παίρνουμε:

$$\Delta P_{\sigma\phi} = m\upsilon_1 - m\upsilon = 1\cdot(-2)kg\cdot m/s - 1\cdot 10kg\cdot m/s = -12kg\cdot m/s$$

ii) Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΣ για το σύστημα σφαίρα-ράβδος ως προς κάποιο άξονα, θα πρέπει η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών, ως προς τον άξονα αυτόν, να είναι μηδενική. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα δυο βάρη, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα $\vec{F}$. Θεωρώντας **αμελητέα** την ακτίνα της σφαίρας, οι ροπές των δύο βαρών και της τάσης $\vec{T}$ του νήματος ως προς τα σημεία Ο, Κ και το μέσον Μ της ράβδου είναι μηδενικές. Αλλά η δύναμη από τον άξονα $\vec{F}$ έχει μηδενική ροπή μόνο ως προς το σημείο Κ, οπότε μόνο ως προς τον άξονα που περνάει από το Κ θα διατηρείται η στροφορμή του συστήματος. Ας την εφαρμόσουμε, θεωρώντας θετική τη στροφορμή την κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και φορά προς τα έξω:

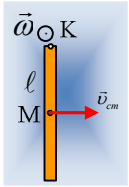


$$L_{\tau\epsilon\lambda} = L_{\alpha\rho\chi} \rightarrow I_K\omega - m\upsilon_1\ell = m\upsilon\ell \rightarrow$$

$$\frac{1}{3}M\ell^2\omega = m\ell(\upsilon_1 + \upsilon) \rightarrow$$

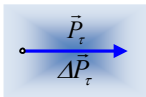
$$\omega = \frac{3m(\upsilon_1 + \upsilon)}{M\ell} = \frac{3\cdot 1(2+10)}{6\cdot 2}rad/s = 3rad/s$$

iii) Το κέντρο μάζας Μ της ράβδου αμέσως μετά την κρούση έχει οριζόντια ταχύτητα, με φορά προς τα δεξιά, μέτρου:



$$\upsilon_{cm} = \omega\cdot R = \omega\frac{\ell}{2} = 3\cdot\frac{2}{2}m/s = 3m/s$$

Οπότε η μεταβολή της ορμής της ράβδου είναι:



$$\Delta P_\rho = P_\tau - P_\alpha = M\upsilon_{cm} - 0 = 6\cdot 3kg\cdot m/s = 18kg\cdot m/s$$

Αν πάρουμε το διανυσματικό άθροισμα των δύο μεταβολών της ορμής, θα έχουμε (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \Delta\vec{P}_\sigma + \Delta\vec{P}_\rho \rightarrow$$

$$\Delta P_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = -12kgm/s + 18kgm/s = 6kgm/s$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η ορμή δεν διατηρείται στη διάρκεια της κρούσης, πράγμα αναμενόμενο, αφού στο σύστημα ασκείται εξωτερική δύναμη από τον άξονα και δεν είναι μονωμένο.

iv) Όσον αφορά την απώλεια της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση έχουμε:

$$\Delta K = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_\rho\omega^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2 \cdot \omega^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}1 \cdot 10^2 J - \left(\frac{1}{2}1 \cdot 2^2 J + \frac{1}{2}\frac{1}{3}6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 J\right) = 50J - 38J = 12J.$$

dmargaris@gmail.com