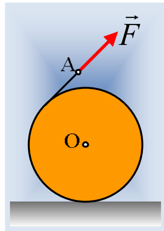
Η ενέργεια κυλίνδρου με πλάγια δύναμη



Ένας ομογενής κύλινδρος ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ γύρω του έχουμε τυλίξει, ένα μακρύ αβαρές νήμα. Τραβάμε το άκρο Α του νήματος, όπως στο σχήμα, ασκώντας του δύναμη F. Μετά από λίγο ο κύλινδρος έχει ταχύτητα κέντρου μάζας $υ_{cm}$.

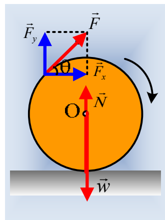
Το έργο της δύναμης στο παραπάνω χρονικό διάστημα είναι:

α) $W_F < 1{,}5\cdot ½\, mυ_{cm}^2$ β) $W_F = 1{,}5\cdot ½mυ_{cm}^2$, γ) $W_F > 1{,}5\cdot ½mυ_{cm}^2$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= ½\, mR^2$.

Απάντηση:



Θεωρούμε την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το Ο. Εξάλλου η δύναμη F μεταφέρεται μέσω του νήματος ασκούμενη σε σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου. Εφαρμόζοντας το $2^ο$ νόμο του Νεύτωνα (δουλεύουμε με μέτρα) παίρνουμε:

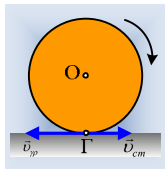
Μεταφορική κίνηση: $ΣF_x=m\cdot α_{cm} \to F\cdot συνθ = m\cdot α_{cm} \to α_{cm} = \dfrac{F\cdot συνθ}{m}$ (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I_{cm}\cdot α_{γων} \to F\cdot R= ½\, mR^2\cdot α_{γων} \to α_{γων} = \dfrac{2F}{mR}$ (2)

Οπότε μετά από χρόνο t ο κύλινδρος έχει:

Ταχύτητα κέντρου μάζας: $υ_{cm} = α_{cm}t = \dfrac{F\cdot συνθ}{m}\cdot t$

Γωνιακή ταχύτητα: $ω = α_{γων}t = \dfrac{2F}{mR}\cdot t$



Αν εστιάσουμε στο σημείο επαφής Γ του κυλίνδρου με το οριζόντιο επίπεδο, αυτό έχει ταχύτητα $υ_{cm}$ εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια $υ_{γρ}=ωR$ εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το Ο, όπως στο σχήμα, οπότε η ταχύτητά του έχει φορά προς τα αριστερά και ο κύλινδρος ολισθαίνει, αφού:

$$ωR = \frac{2F}{mR}R\cdot t = \frac{2F}{m}\cdot t > \frac{F\cdot συνθ}{m}\cdot t = υ_{cm}$$

Στο παραπάνω χρονικό διάστημα η δύναμη F παράγει έργο ίσο με την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

$$W_F = K_{κυλ} = K_μ + K_π = \frac{1}{2}mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}ω^2 = \frac{1}{2}mυ_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2ω^2 \to$$

$$W_F = \frac{1}{2} m \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4} m (R\omega)^2 > \frac{1}{2} m \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4} m \upsilon_{cm}^2 \text{ ή}$$

$$W_F > \frac{1}{2} m \upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m \upsilon_{cm}^2 \rightarrow W_F > \frac{3}{2}\frac{1}{2} m \upsilon_{cm}^2$$

Σωστό το γ).

dmargaris@gmail.com