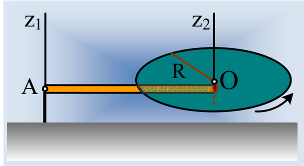
Η «ιδιοστροφορμή» μετατρέπεται σε στροφορμή



Μια οριζόντια ομογενής σανίδα ΑΟ μήκους l=2m και μάζας m=3kg μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z_1, ο οποίος περνά από το άκρο της Α, χωρίς τριβές. Στο άλλο της άκρο Ο, έχει συνδεθεί κατακόρυφος άξονας z_2, γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται οριζόντιος δίσκος ακτίνας R=1m και μάζας M=4kg. Θέτουμε τον δίσκο σε περιστροφή, όπως στο σχήμα (ο δίσκος είναι σε οριζόντιο επίπεδο ελαφρά πάνω από τη σανίδα, οπότε δεν εφάπτεται με αυτήν), με αρχική γωνιακή ταχύτητα 2rad/s, ενώ η ράβδος συγκρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση και παρατηρούμε ότι εξαιτίας των τριβών μεταξύ του άξονα z_2 και του δίσκου, αυτός επιβραδύνεται και σταματά μετά από χρόνο t_1=40s.

i) Να υπολογιστούν η αρχική στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του z_2 και η ροπή της τριβής που τον επιβραδύνει, θεωρώντας την σταθερή. Να σχεδιάστε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα:

α) της αρχικής στροφορμής και β) της ροπής που δέχτηκε ο δίσκος από τον άξονα.

ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο να κινηθεί και παρατηρούμε ότι αυτή αρχίζει να περιστρέφεται.

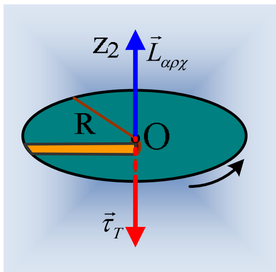
α) Να ερμηνευθεί η περιστροφή της ράβδου γύρω από τον άξονα z.

β) Να υπολογιστεί η τελική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.

γ) Πόση μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών;

Δίνεται ότι η ιδιοστροφορμή (το spin) ενός στερεού είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε άξονα, παράλληλο προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Δίνονται επίσης οι ροπές αδράνειας των στερεών, ως προς τους άξονες περιστροφής τους. Για τη ράβδο I_1= (1/3)ml^2 και για το δίσκο I_2= ½ MR^2).

Απάντηση:



i) Η αρχική στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του z_2 έχει μέτρο:

$$L_{αρχ} = I_{cm}\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1^2\cdot 2kgm^2/s = 4kgm^2/s.$$

και διεύθυνση του άξονα, με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

Εξάλλου από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το δίσκο, παίρνουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$$

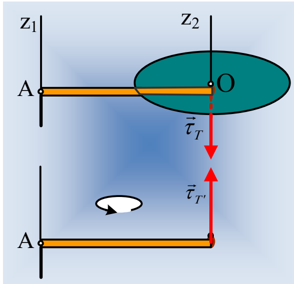
Αλλά επειδή η ροπή παραμένει σταθερή, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma\tau \to \frac{0 - L_{\alpha\rho\chi}}{t_1} = \tau_T \to \tau_T = -\frac{L_{\alpha\rho\chi}}{t_1} = -\frac{4}{40} N \cdot m = -0{,}1 N \cdot m$$

Όπου το (-) σημαίνει ότι έχει αντίθετη φορά από τη στροφορμή, όπως στο παραπάνω σχήμα.

ii) Οι τριβές που επιβραδύνουν το δίσκο δημιουργούν την ροπή τ_T που βρήκαμε παραπάνω.

α) Αν όμως στο δίσκο ασκείται η ροπή των τριβών τ_T, τότε στη ράβδο ασκείται η αντίδρασή της $\tau_{T'}$, όπως στο σχήμα. Η ροπή αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ως μια ροπή ζεύγους, η οποία ασκείται στη ράβδο και το αποτέλεσμά της θα είναι η ράβδος να επιταχυνθεί και να αρχίσει να περιστρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, όπως στο σχήμα.



β) Οι παραπάνω ροπές των τριβών, είναι εσωτερικές για το σύστημα ράβδος-δίσκος. Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα βάρη και η δύναμη από τον άξονα. Αλλά ούτε τα βάρη (παράλληλα προς τον άξονα z_1) ούτε η δύναμη από τον άξονα, εμφανίζουν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου z_1, οπότε η στροφορμή του συστήματος ως προς (κατά) τον άξονα z_1 παραμένει σταθερή. Έτσι έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi,z1} = L_{\tau\varepsilon\lambda,z1} \to$$

Τελικά ο δίσκος θα σταματήσει να περιστρέφεται ως προς τον άξονα z_2, αφού τότε μόνο θα μηδενιστεί η ροπή των τριβών και το σύστημα θα αποτελέσει πια «ένα στερεό» που θα περιστρέφεται γύρω από το Α, με γωνιακή ταχύτητα Ω. Όμως η αρχική στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα z_1 είναι η στροφορμή του δίσκου, ο οποίος στρέφεται γύρω από τον άξονά του z_2. Η «ιδιοστροφορμή» αυτή δεν εξαρτάται από το σημείο ή τον άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζεται, δηλαδή ισχύει:

$$L_{\alpha\rho\chi,z2} = L_{\alpha\rho\chi,z_1} \to$$

Παίρνοντας τώρα τη διατήρηση της στροφορμής ως προς τον άξονα z_1 για το σύστημα, έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi,z_2} = L_{\tau\varepsilon\lambda z1} = I_3\Omega$$

Όπου $I_3 = \frac{1}{3}m\ell^2 + \left(\frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2\right) = \frac{1}{3}3 \cdot 2^2 kgm^2 + \left(\frac{1}{2}4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2\right)kgm^2 = 22kgm^2$.

$$\Omega = \frac{L_{\alpha\rho\chi,z_2}}{I_3} = \frac{4}{22} rad/s = {}^2\!/_{11} rad/s$$

γ) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος, εμφανίζεται ως θερμική ενέργεια λόγω τριβών:

$$Q_\theta = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}I_2\omega^2 - \frac{1}{2}I_3\Omega^2 \to$$

$$Q_\theta = \frac{1}{4}MR^2\omega^2 - \frac{1}{2}I_3\Omega^2 \to$$

$$Q_\theta = \frac{1}{4} 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 J - \frac{1}{2} 22 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2 J = 3{,}63 J$$

Σχόλια.

Η ιδιοστροφορμή (το spin) του δίσκου γύρω από τον άξονά του z_1 δεν είναι κάποιο ιδιαίτερο είδος στροφορμής. Είναι απλά στροφορμή, όπως και κάθε άλλη. Απλά είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο. Ενώ δηλαδή την υπολογίσαμε ως προς τον άξονα z_2, ίδια στροφορμή έχουμε και ως προς τον άξονα z_1.

Έτσι στο ii) ερώτημα, ενώ αρχικά η στροφορμή εμφανίζεται ως spin, στη συνέχεια αυτή εμφανίζεται ως στροφορμή ενός στερεού που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα στο άκρο Α.

dmargaris@gmail.com