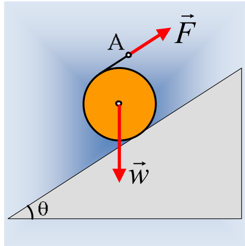
# *Ένας κύλινδρος σε λείο κεκλιμένο επίπεδο*




Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας m, τυλίγουμε ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τοποθετούμε τον κύλινδρο σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ και ασκούμε στο άκρο Α του νήματος, σταθερή δύναμη F, παράλληλη με το επίπεδο και μέτρου F= ½ mg·ημθ.

i) Ο κύλινδρος θα κινηθεί κατά μήκος του επιπέδου:

α) προς τα πάνω, β) προς τα κάτω, γ) δεν θα κινηθεί κατά μήκος του επιπέδου.

ii) Μέσω του έργου της δύναμης F:

α) μεταφέρεται ενέργεια στον κύλινδρο,

β) αφαιρείται ενέργεια από τον κύλινδρο,

γ) τίποτα από τα δύο.

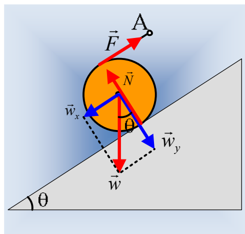
iii) Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου εμφανίζεται σαν μεταφορική κινητική ενέργεια $K_μ$ και σαν στροφική κινητική ενέργεια $K_π$. Ο λόγος $K_μ/K_π$ είναι ίσος με:

α) ½ , β) 1, γ) 2.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του I= ½ $mR^2$.

## *Απάντηση:*




i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όπου η δύναμη μεταφέρεται μέσω του νήματος και ασκείται εφαπτομενικά πάνω του. Στη διεύθυνση την παράλληλη προς το επίπεδο, με θετική φορά προς τα πάνω έχουμε:

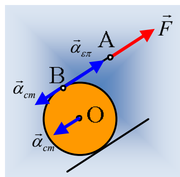
$$ΣF_x=F-w_x= ½\ mg·ημθ-mg·ημθ= -\ ½\ mg·ημθ <0$$

Συνεπώς το κέντρο μάζας του κυλίνδρου αποκτά επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω και σωστή απάντηση είναι η β).

ii) Θεωρώντας την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική, παίρνουμε εφαρμόζοντας το $2^ο$ νόμο του Νεύτωνα (δουλεύουμε με μέτρα):

Μεταφορική κίνηση: $ΣF_x=m·α_{cm} \rightarrow mg·ημθ-\ ½\ mg·ημθ=\ m·α_{cm} \rightarrow α_{cm}=\ ½\ g·ημθ$. (1)

Στροφική κίνηση: $Στ=I_{cm}·α_{γων} \rightarrow F·R=\ ½\ mR^2·α_{γων} \rightarrow R·α_{γων}=g·ημθ$ (2)




Ερχόμαστε τώρα στο σημείο Β του κυλίνδρου στο οποίο καταλήγει το νήμα. Αυτό έχει επιτάχυνση ίση με την $α_{cm}$ λόγω μεταφορικής κίνησης και $α_{επ}$ λόγω κυκλικής κίνησης με μέτρο $α_{επ}=α_{γων}·R$ (έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία δεν μας απασχολεί στην παρούσα φάση, αφού κατευθύνεται προς το κέντρο Ο). Οπότε η επιτάχυνση στη διεύθυνση x, έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$\alpha_B=\alpha_{\varepsilon\pi}-\alpha_{cm}=g\cdot\eta\mu\theta-\tfrac{1}{2}\,g\cdot\eta\mu\theta=\tfrac{1}{2}\,g\cdot\eta\mu\theta \ (3)$$

Την ίδια επιτάχυνση λόγω νήματος, έχει και το άκρο Α, το σημείο εφαρμογής της δύναμης. Αλλά τότε το έργο της δύναμης είναι $W_F=F\cdot x$, όπου x η μετατόπιση του σημείου Α, είναι δηλαδή θετικό. Αυτό σημαίνει ότι μέσω του έργου της δύναμης μεταφέρεται ενέργεια στον κύλινδρο. Σωστό το α).

iii) Μετά από χρόνο t το κέντρο μάζας έχει ταχύτητα $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t=\tfrac{1}{2}\,g\cdot\eta\mu\theta\cdot t$, ενώ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου έχει μέτρο $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=\left(\frac{g}{R}\right)\eta\mu\theta\cdot t$. Αλλά τότε ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}=\frac{m\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}g\cdot\eta\mu\theta\cdot t\right)^2}{R^2\left(\frac{g}{R}\cdot\eta\mu\theta\cdot t\right)^2}=\frac{1}{2}$$

Σωστό το α).

***Σχόλιο:***

Με σύγκριση των (1) και (3) προκύπτει ότι όσο είναι το μέτρο της μετατόπισης του κέντρου μάζας, τόση είναι και το αντίστοιχο μέτρο της μετατόπισης του σημείου Α. Οπότε για τα έργα των δυνάμεων θα έχουμε ότι:

$$W_w=mg\cdot\eta\mu\theta\cdot x \ \ \kappa\alpha\iota\ \ W_F=F\cdot x=\tfrac{1}{2}\,mg\cdot\eta\mu\theta\cdot x$$

Άρα η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου μετά από μετατόπιση x θα είναι ίση:

$$K=\frac{3}{2}mg\cdot\eta\mu\theta\cdot x.$$

Η κινητική ενέργεια όμως λόγω μεταφοράς είναι ίση με:

$$K_{\mu\varepsilon\tau}=(\Sigma F)\cdot x=(mg\cdot\eta\mu\theta-F)\cdot x=\tfrac{1}{2}\,mg\cdot\eta\mu\theta\cdot x$$

Οπότε η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής θα είναι:

$$K_{\pi\varepsilon\rho}=K-K_{\mu\varepsilon\tau}=mg\cdot\eta\mu\theta\cdot x$$

Έτσι ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με:

$$K_{\mu\varepsilon\tau}/K_{\pi\varepsilon\rho}=\tfrac{1}{2}.$$

***dmargaris@gmail.com***