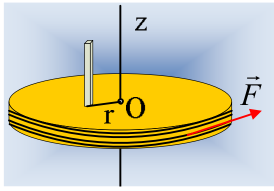
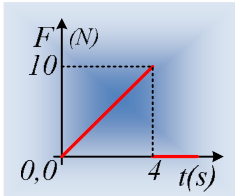
Ο δίσκος περιστρέφεται από μεταβλητή δύναμη



Ο οριζόντιος ομογενής δίσκος του σχήματος, μάζας M=37/8kg και ακτίνας R=4m, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του Ο. Σε απόσταση r=1m από το κέντρο Ο, βρίσκεται κολλημένη μια όρθια λεπτή πρισματική ράβδος, μήκους l=2m και μάζας m=3kg. Γύρω από τον δίσκο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κάποια στιγμή t_0=0, ασκούμε στο άκρο του οριζόντια δύναμη F, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διάγραμμα.



i) Για τη χρονική *στιγμή* t_1=2s, να βρεθούν:

α) Η ροπή αδράνειας του στερεού δίσκος-ράβδος.

β) Η στροφορμή του συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του, ως προς τον άξονα z.

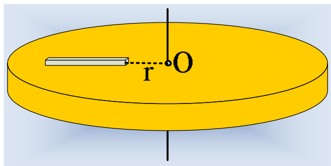
γ) Η ισχύς της δύναμης F, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου και του δίσκου.

ii) Για το χρονικό διάστημα από t_1=2s έως t_2=4s να υπολογιστούν:

α) Η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος δίσκος-ράβδος.

β)Το έργο της δύναμης F.

iii) Τη χρονική στιγμή t_3=5s, η ράβδος ανατρέπεται και προσκολλάται πάνω στο δίσκο, στη διεύθυνση μιας ακτίνας, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η τελική κινητική ενέργεια της ράβδου.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_κ$= ½ MR^2, ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_ρ$= (1/12)ml^2.

Απάντηση:

i) Η ασκούμενη δύναμη στο άκρο του νήματος, μεταφέρεται μέσω του νήματος, ασκούμενη στο δίσκο, εμφανίζοντας ροπή τ=F·R ως προς το κέντρο του Ο. Εξάλλου από το διάγραμμα F-t βλέπουμε τη δύναμη να είναι ανάλογη του χρόνου, οπότε τη στιγμή t_1=2s έχει μέτρο F_1=5N, με αντίστοιχη ροπή:

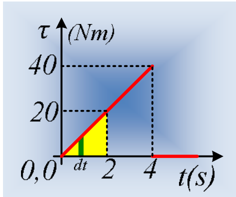
$$τ_1=FR=20N·m.$$

α) Όλες οι σημειακές μάζες από τις οποίες αποτελείται η ράβδος, απέχουν από τον άξονα την ίδια απόσταση r, οπότε η ροπή αδράνειας του στερεού που σχηματίσαμε είναι:

$$I_{1,s} =I_δ+I_ρ= ½\ MR^2+mr^2= ½\ (37/8)·4^2\ kgm^2 +3·1^2\ kgm^2=37\ kgm^2+3\ kgm^2 =40kgm^2.$$

β) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα, έχουμε:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = Στ \rightarrow dL_{ολ} = (Στ)dt \;\; (1)$$



Σχεδιάζουμε το διάγραμμα της ροπής της δύναμης (δεν έχουμε άλλες εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής, αφού τα βάρη και η δύναμη του άξονα, δεν εμφανίζουν ροπή…) σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως στο διπλανό διάγραμμα. Αν πάρουμε ένα χρονικό διάστημα dt, τότε το πράσινο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν dE=τ·dt. Αλλά τότε το εμβαδόν του κίτρινου χωρίου στο σχήμα, είναι το άθροισμα πολλών τέτοιων στοιχειωδών εμβαδών και από την (1), είναι αριθμητικά ίσο και με τη μεταβολή της στροφορμής του συστήματος στο διάστημα από 0-2s. Έχουμε δηλαδή:

$$L_1 - L_0 = \frac{1}{2} 2 \cdot 20 \rightarrow L_1 = 20kgm^2 / s$$

Ενώ τη στιγμή αυτή η στροφορμή μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = Στ = FR = 20kgm^2 / s^2.$$

γ) Η ισχύς της δύναμης, ίση με την ισχύ της ροπής της δύναμης είναι:

$$P_F = τ \cdot ω = F \cdot R \cdot ω \;\; (2)$$

Αλλά από την στροφορμή παίρνουμε:

$$L_1 = I_{1,s} \cdot ω_1 \rightarrow ω_1 = \frac{L_1}{I_{1,s}} = \frac{20}{40} rad/s = 0,5rad/s \rightarrow$$

$$P_F = F \cdot R \cdot ω_1 = 5 \cdot 4 \cdot 0,5W = 10W$$

Για τους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου, έχουμε:

$$\frac{dK_δ}{dt} = Στ_δ \cdot ω = I_δ α_{γων} \cdot ω$$

Αλλά $\frac{dL_{ολ}}{dt} = FR = I_{1,s} \cdot a_{γων} \rightarrow a_{γων} = \frac{FR}{I_{1,s}} = \frac{5 \cdot 4}{40} rad / s^2 = 0,5 rad / s^2 . \rightarrow$

$$\frac{dK_δ}{dt} = I_ρ α_{γων} \cdot ω = 37 \cdot 0,5 \cdot 0,5 J/s = 9,25 J / s$$

Όμοια για τη ράβδο έχουμε:

$$\frac{dK_ρ}{dt} = Στ_ρ \cdot ω = I_ρ α_{γων} \cdot ω = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 J / s = 0,75 J / s$$

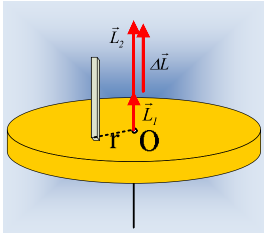
Αξίζει να προσεχθεί ότι $9,25J / s + 0,75J / s = 10J / s = P_F$

ii) Ακολουθώντας την πορεία στο παραπάνω β) ερώτημα, βρίσκουμε ότι τη στιγμή t_2=4s, το σύστημα έχει στροφορμή:

$$L_2 - L_0 = \frac{1}{2}4 \cdot 40 \rightarrow L_2 = 80kgm^2 / s$$

Η οποία αντιστοιχεί σε γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_2 = \frac{L_2}{I_{1,s}} = \frac{80}{40}rad/s = 2rad/s$$



α) Έτσι στο παραπάνω χρονικό διάστημα, έχουμε μεταβολή της στροφορμής:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = (80-20)kgm^2/s = 60\ kgm^2/s$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα πάνω.

β) Το έργο της δύναμης είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του στερεού δίσκος-ράβδου:

$$W_{F_{1\rightarrow 2}} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}I_{1,s}\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_{1,s}\omega_1^2 \rightarrow$$

$$W_{F_{1\rightarrow 2}} = \frac{1}{2}40\left(2^2 - 0,5^2\right)J = 75J$$

iii) Μόλις η ράβδος γίνει οριζόντια, το μέσον της απέχει κατά x=2m από το κέντρο του δίσκου, οπότε η ροπή αδράνειας που οφείλεται σε αυτήν, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο είναι:

$$I_{\rho,2} = \frac{1}{12}m\ell^2 + mx^2 = \frac{1}{12}3 \cdot 2^2 kgm^2 + 3 \cdot 2^2 kgm^2 = 13kgm^2.$$

Οπότε το στερεό δίσκος – ράβδος έχει ροπή αδράνειας:

$$I_{2,s} = I_\delta + I_{\rho,2} = ½\ MR^2 + I_{\rho,2} = ½\ (37/8)\cdot 16kgm^2 + 13\ kgm^2 = 50\ kgm^2.$$

Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της στροφορμής για το σύστημα (στη διάρκεια της πτώσης της ράβδου δεν ασκούνται στο σύστημα εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα z), παίρνουμε:

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$I_{1,s}\omega_2 = I_{2,s}\omega_3 \rightarrow \omega_3 = \frac{I_{1,s}}{I_{2,s}}\omega_2 = \frac{40}{50}2rad/s = 1,6rad/s$$

Οπότε η τελική κινητική ενέργεια της ράβδου είναι ίση:

$$K_\rho = \frac{1}{2}I_{\rho,2}\omega_3^2 = \frac{1}{2}13 \cdot 1,6^2 J = 16,64J$$

dmargaris@gmail.com