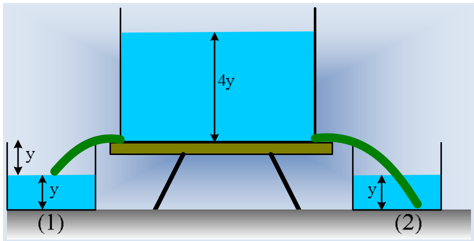
Ξανά το γέμισμα δύο δοχείων



Από μια υπερυψωμένη δεξαμενή νερού, πρόκειται να γεμίσουμε δύο όμοια δοχεία (1) και (2), κυλινδρικού σχήματος και ύψους 2y. Για το γέμισμα χρησιμοποιούμε δυο όμοια λάστιχα-σωλήνες διατομής A_1, τα οποία συνδέονται κοντά στον πυθμένα της δεξαμενής σε βάθος 4y, από την επιφάνειά της. Κατά τη διάρκεια του γεμίσματος του πρώτου δοχείου, προσέχουμε κάθε στιγμή το άκρο του σωλήνα-λάστιχου να έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια του νερού, ενώ στο δεύτερο δοχείο ο σωλήνας καταλήγει στον πυθμένα του δοχείου. Για τις θέσεις του σχήματος, όπου το ύψος του νερού στα δοχεία είναι y:

i) Αν η ταχύτητα εκροής στο (1) δοχείο είναι υ_1 και η αντίστοιχη ταχύτητα στο (2) δοχείο υ_2, ισχύει:

α) $\upsilon_1 < \upsilon_2$, β) $\upsilon_1 = \upsilon_2$, γ) $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

ii) Αν το εμβαδόν της βάσης των δοχείων είναι Α, τότε για τις δύο παροχές ισχύει:

α) $\Pi_1=A_1\cdot\upsilon_1$ και $\Pi_2=A\cdot\upsilon_2$.

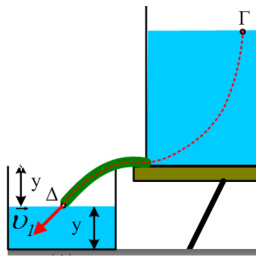
β) $\Pi_1=A_1\cdot\upsilon_1$ και $\Pi_2=A_1\cdot\upsilon_2$.

γ) $\Pi_1=A\cdot\upsilon_1$ και $\Pi_2=A\cdot\upsilon_2$.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, καθώς και οι ροές μόνιμες και στρωτές και στις δύο περιπτώσεις.

Απάντηση:

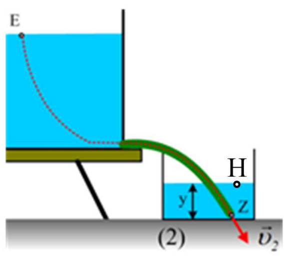
i) Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Γ στην επιφάνεια της δεξαμενής και του σημείου Δ, στο άκρο του πρώτου σωλήνα, έχουμε:



$$P_\Gamma + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = P_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

Θεωρώντας τώρα αμελητέα την ταχύτητα του σημείου Γ, αφού έχουμε μεγάλη επιφάνεια της δεξαμενής, οπότε δεχόμαστε ότι ουσιαστικά δεν κατέρχεται η ελεύθερη επιφάνειά της και $P_\Gamma=P_\Delta=P_{\alpha\tau\mu}$, παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(4y+y)} = \sqrt{10gy} \quad (1)$$



Με την ίδια λογική μεταξύ των σημείων Ε στην επιφάνεια της δεξαμενής και του σημείου Ζ στην έξοδο του δεύτερου σωλήνα, παίρνουμε:

$$P_E + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 = P_Z + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Και θεωρώντας ξανά ότι $\upsilon_E=0$, ενώ $P_E=P_{\alpha\tau\mu}$ και $p_Z=p_{\alpha\tau\mu}+\rho g y$ θα έχουμε:

$$P_{ατμ} + \rho g(4y + 2y) = P_{ατμ} + \rho g y + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(4y + 2y - y)} = \sqrt{10gy} \quad (2)$$

Με σύγκριση των (1) και (2) προκύπτει ότι οι δυο ταχύτητες εκροής είναι ίσες. Σωστό το β).

ii) Η παροχή καθορίζεται από την ταχύτητα εκροής στο άκρο κάθε σωλήνα, καθώς και τη διατομή της φλέβας στο άκρο αυτό, η οποία λαμβάνεται ίση με τη διατομή του σωλήνα A_1.
Αλλά τότε $Π_1=A_1\cdot\upsilon_1=A_1\upsilon_2=Π_2$ και σωστή είναι η β) επιλογή.

Σχόλια:

- Η εξίσωση (2) μας λέει ότι η ταχύτητα εκροής και άρα και η παροχή, καθορίζεται από την κατακόρυφη απόσταση h=4y+y=5y των δύο ελεύθερων επιφανειών και όχι από το αν έχει βυθιστεί η όχι το λάστιχο στο δοχείο.
- Αν πάρουμε y=16cm και $A_1=2cm^2$, ενώ τα δοχεία έχουν βάσεις $A=0,5m^2$, με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι $\upsilon_1=\upsilon_2=4m/s$ και παροχή $Π_1=Π_2=8\cdot10^{-4}m^3/s$ (0,8L/s).
- Θα μπορούσε στο δεύτερο δοχείο κάποιος να εφαρμόσει νόμο Bernoulli από το σημείο Ε σε ένα σημείο Η στην επιφάνεια του δοχείου και να βρει επίσης ταχύτητα $\upsilon_H=4m/s$. Βέβαια τότε θα έβρισκε παροχή $Π_2'=2m^3/s$, αφού η επιφάνεια του νερού στο δοχείο ανέρχεται κατά 4m/s!
- Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία ανεβαίνουν οι επιφάνειες, σύμφωνα με τη λύση που δόθηκε;

$$Π_1=Π_2=A\cdot u \rightarrow u = \frac{dy}{dt} = \frac{Π}{A} = \frac{8\cdot10^{-4}}{0,5} m/s = 1,6mm/s$$

- Πού βρίσκεται η αλήθεια, είναι εύκολο να διαπιστωθεί με ένα απλό πείραμα. Μπορούμε να χρονομετρήσουμε το χρόνο για να γεμίσουμε ένα δοχείο, με τους διαφορετικούς τρόπους που δόθηκαν. Ο χρόνος που θα χρειαστούμε θα είναι της τάξης των 200s ή της τάξης των 0,25s; Αν χρειαστούμε χρόνο 0,25s ή 0,5s ή και 1s, τότε η παραπάνω λύση είναι λάθος και εφαρμόζεται ο νόμος Bernoulli από το Ε στην επιφάνεια, σημείο Η. Αν ο χρόνος είναι 200s ή 250s, τότε η λύση που δόθηκε είναι η σωστή. Η ροή σταματά στο άκρο του σωλήνα και όχι στην επιφάνεια του (2) δοχείου.

dmargaris@gmail.com