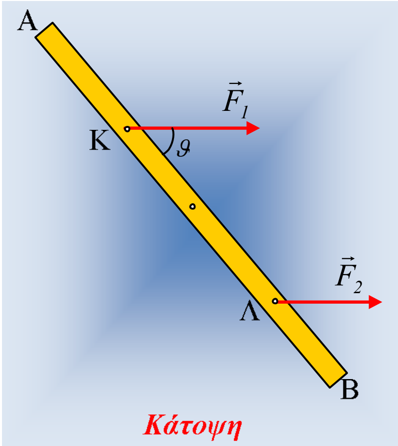
Μια ράβδος σε οριζόντιο επίπεδο



Η ομογενής ράβδος του σχήματος, μήκους (ΑΒ)= ℓ =4m και μάζας 60kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή t_0=0 δέχεται την επίδραση δύο σταθερών οριζοντίων παραλλήλων δυνάμεων μέτρων F_1=60Ν και F_2=50Ν, οι οποίες σχηματίζουν με τη ράβδο γωνία θ (ημθ=0,8), όπως στο σχήμα, όπου (ΑΚ)=1m και (ΑΛ)=3,2m.

i) Να βρεθεί η ροπή (κατεύθυνση και μέτρο) κάθε δύναμη ως προς το άκρο Α της ράβδου, καθώς και η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς Α.

ii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των σημείων Κ και Λ (σημεία εφαρμογής των δύο δυνάμεων) τη χρονική στιγμή t_1=1,2s.

iii) Αν τη χρονική στιγμή t_2=3s πάψει να ασκείται στη ράβδο η δύναμη F_2, ποια η επιτάχυνση του σημείου Κ, αμέσως μετά (τη στιγμή t_2^+);

iv) Ερώτημα μόνο για Καθηγητές: Να βρεθεί η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Κ την παραπάνω στιγμή (t_2^+).

Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτή άξονα που περνά από το μέσον της Ι= (1/12)ml^2.

Απάντηση:

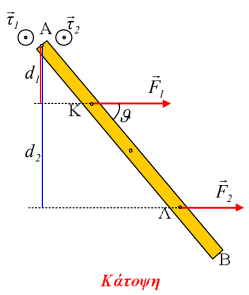
i) Όσον αφορά τις ροπές των δύο οριζοντίων δυνάμεων, ως προς το άκρο Α της ράβδου, αυτές είναι κάθετες στο οριζόντιο επίπεδο, συνεπώς κατακόρυφες με φορά προς τα πάνω, όπως στο πρώτο από τα παρακάτω σχήματα, με μέτρα:

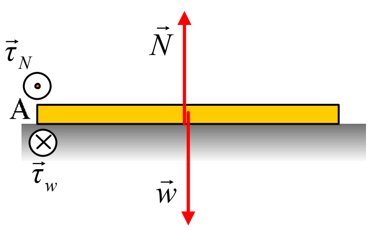
$$\tau_1=F_1\cdot d_1=F_1\cdot(AK)\cdot\eta\mu\theta=60\cdot 1\cdot 0{,}8N\cdot m=48N\cdot m$$

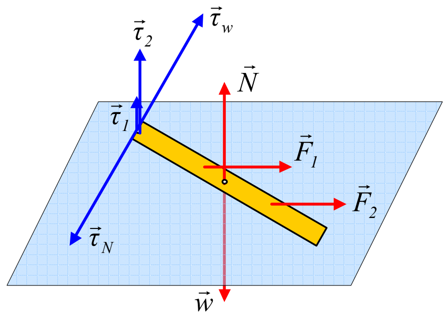
$$\tau_2=F_2\cdot d_2\cdot\eta\mu\theta=F_2\cdot(A\Lambda)\cdot\eta\mu\theta=50\cdot 3{,}2\cdot 0{,}8N\cdot m=128Nm.$$

Εκτός από τις παραπάνω δύο δυνάμεις, στη ράβδο ασκείται το βάρος και η κάθετη αντίδραση (δύναμη στήριξης) Ν του επιπέδου. Αλλά η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, οπότε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w=mg=60\cdot 10N=600N.$$







Έτσι οι ροπές ως προς το άκρο Α, των δύο κατακόρυφων αυτών δυνάμεων, είναι οριζόντιες με φορά όπως στο μεσαίο σχήμα και μέτρα:

$$\tau_N=\tau_w= w\cdot\frac{\ell}{2}=600\cdot 2N\cdot m=1200N\cdot m$$

Στο τρίτο σχήμα, εμφανίζονται στο χώρο τα διανύσματα των δυνάμεων και των ροπών τους ως προς το άκρο Α.

Η συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το Α, είναι το διανυσματικό άθροισμα των παραπάνω ροπών, όπου στην οριζόντια διεύθυνση:

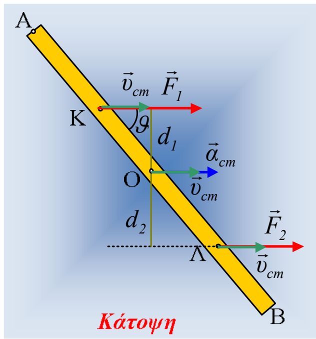
$$\Sigma\tau_x=\Sigma\tau_{o\rho}=\tau_N-\tau_w=0,$$

ενώ στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma\tau_y=\Sigma\tau=\tau_1+\tau_2=48N\cdot m+128N\cdot m=176N\cdot m$$

Με φορά προς τα πάνω.

ii) **Θεωρούμε** την κίνηση της ράβδου ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm}, την ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο, (του μέσου της ράβδου) και μια με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:



$$\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F_1+F_2=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_{cm}=\frac{F_1+F_2}{m}=\frac{60+50}{60}m/s^2=\frac{11}{6}m/s^2$$

$$\Sigma\tau_o=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά ως προς το μέσον Ο της ράβδου η συνολική ροπή των δυνάμεων είναι:

$$\Sigma\tau=F_2\cdot(O\Lambda)\cdot\eta\mu\theta-F_1\cdot(KO)\cdot\eta\mu\theta=50\cdot 1{,}2\cdot 0{,}8N\cdot m-60\cdot 1\cdot 0{,}8N\cdot m=0$$

Δηλαδή αντίθετα από το άκρο Α, ως προς το κέντρο μάζας Ο η συνολική ροπή είναι μηδενική, με αποτέλεσμα η ράβδος να μην αποκτά γωνιακή επιτάχυνση, πράγμα που σημαίνει ότι η ράβδος δεν πρόκειται να περιστραφεί και τελικά η κίνηση θα είναι **μεταφορική**.

Συνεπώς τη στιγμή t_1=1,2s το κέντρο μάζας έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}t_1=\frac{11}{6}\cdot 1{,}2m/s=2{,}2m/s$$

Με κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση της α_{cm} άρα και των δύο δυνάμεων F_1 και F_2. Από τη στιγμή όμως που η κίνηση είναι μεταφορική τις ίδιες ταχύτητες έχουν και τα σημεία Κ και Λ.

iii) Μόλις καταργηθεί η δύναμη F_2 και ενώ η ράβδος έχει ταχύτητα με κατεύθυνση ίδια με τη δύναμη F_1 η ράβδος επιταχύνεται εξαιτίας της δύναμης αυτής. Θεωρούμε ξανά την κίνηση της ράβδου ως σύνθετη και εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m\cdot\alpha_{cm,1} \rightarrow F_1 = m\cdot\alpha_{cm,1} \rightarrow \alpha_{cm,1} = \frac{F_1}{m} = \frac{60}{60} m/s^2 = 1 m/s^2$$

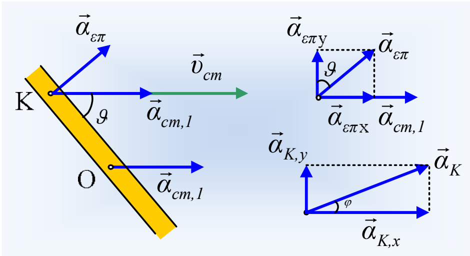
$$\Sigma\tau_O = I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Παίρνουμε ως θετική φορά την ωρολογιακή και έχουμε:

$$F_1\cdot(KO)\cdot\eta\mu\theta = \frac{1}{12}m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{12F_1\cdot(KO)\cdot\eta\mu\theta}{m\ell^2} = \frac{12\cdot 60\cdot 1\cdot 0{,}8}{60\cdot 4^2} rad/s^2 = 0{,}6 rad/s^2$$

Τώρα το σημείο K έχει επιτάχυνση ίση με $\alpha_{cm,1}$ εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(KO)$ εξαιτίας της επιταχυνόμενης κυκλικής κίνησης την οποία ξεκινά και μια κεντρομόλο, μέτρου $\alpha_\kappa=\omega^2(KO)=0$, αφού έχει τη στιγμή αυτή μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Η επιτρόχια επιτάχυνση, κάθετη στη ράβδο έχει μέτρο:



$$\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(KO)=0{,}6\cdot 1 m/s^2=0{,}6 m/s^2.$$

Οπότε αναλύοντας την σε δύο συνιστώσες, μια στη διεύθυνση της ταχύτητας (και της δύναμης F_1) την $\alpha_{\varepsilon\pi,x}$ και μια σε κάθετη διεύθυνση την $\varepsilon_{\varepsilon\pi,y}$ θα έχουμε:

$$\alpha_{\varepsilon\pi x}=\alpha_{\varepsilon\pi}\cdot\eta\mu\theta=0{,}48 m/s^2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_{\varepsilon\pi y}=\alpha_{\varepsilon\pi}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0{,}6\cdot 0{,}6 m/s^2=0{,}36 m/s^2.$$

Ερχόμαστε τώρα στο τελευταίο σχήμα υπολογίζοντας την συνολική επιτάχυνση του K:

$$\alpha_K = \sqrt{\alpha_{K,x}^2 + \alpha_{K,y}^2} = \sqrt{(a_{cm} + a_{\varepsilon\pi x})^2 + a_{\varepsilon\pi y}^2} \rightarrow$$

$$\alpha_K = \sqrt{(1+0{,}48)^2 + 0{,}36^2}\, m/s^2 \approx 1{,}5 m/s^2$$

Με διεύθυνση, που σχηματίζει με την διεύθυνση της δύναμης, γωνία φ όπου:

$$\varepsilon\phi\varphi = \frac{\alpha_{K,y}}{a_{K,x}} = \frac{0{,}36}{1{,}48} \approx 0{,}24$$

iv) Ερώτημα μόνο για Καθηγητές:

Όπως αναλύθηκε στην συζήτηση που ακολούθησε την ανάρτηση, η κεντρομόλος επιτάχυνση για τη ΜΙΑ και ΜΟΝΟ μία κίνηση του σημείου K, είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης, η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα. Εδώ η συνιστώσα:

$$\alpha_{Ky} = \alpha_{\varepsilon\pi y}=\alpha_{\varepsilon\pi}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0{,}6\cdot 0{,}6 m/s^2=0{,}36 m/s^2.$$

Σχόλιο:

Αξίζει να επισημανθεί τι συμβαίνει με τις ροπές στην περίπτωση της μεταφορικής κίνησης. Από τη στιγμή που η ράβδος επιταχύνεται η συνολική ροπή είναι μηδενική, **ΜΟΝΟ** ως προς το κέντρο μάζας. Παραπάνω υπολογίσαμε ότι ως προς το άκρο Α η συνολική ροπή είναι μη μηδενική…

dmargaris@gmail.com