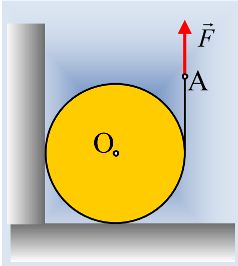
Κύλινδρος εν γωνία…

Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας 20kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, σε επαφή με κατακόρυφο τοίχο, όπως στο διπλανό σχήμα. Τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε κατακόρυφη δύναμη **F** της μορφής F=3t (μονάδες στο S.I.). Παρατηρούμε ότι το άκρο Α του νήματος αρχίζει να κινείται προς τα πάνω τη χρονική στιγμή t_1. Δίνεται ότι ο κύλινδρος εμφανίζει τόσο με το οριζόντιο επίπεδο, όσο και με τον κατακόρυφο τοίχο, συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}5$, ενώ $g=10m/s^2$.



i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κύλινδρο τις χρονικές στιγμές:

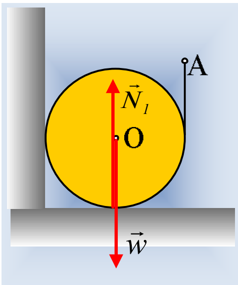
α) $t_0=0$ και β) $t_2=10s$.

ii) Αν τη στιγμή $t_2=10s$ ο κύλινδρος δέχεται από τον τοίχο οριζόντια δύναμη μέτρου $N_2=25N$, να υπολογίστε την κατακόρυφη δύναμη που δέχεται από το οριζόντιο επίπεδο.

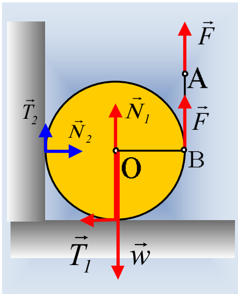
iii) Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή που ο κύλινδρος θα αρχίσει να περιστρέφεται.

Απάντηση:

i) Στο πάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο πριν αρχίσει να δέχεται κάποια δύναμη μέσω του νήματος (t=0 οπότε και F=0). Το βάρος και η δύναμη στήριξης N_1 (η κάθετη αντίδραση του οριζοντίου επιπέδου) είναι κατακόρυφες δυνάμεις, οπότε ο κύλινδρος δεν δέχεται κάποια δύναμη από τον τοίχο.



Αντίθετα τη στιγμή t_2, η δύναμη F μεταφέρεται μέσω του νήματος, ασκούμενη στο σημείο Β, σ το άκρο της οριζόντιας ακτίνας του κυλίνδρου, η οποία τείνει να περιστρέψει τον κύλινδρο. Αυτό όμως έχει ως αποτέλεσμα να κάνει την εμφάνισή της δύναμη τριβής, όπως στο σχήμα. Αλλά η εμφάνιση αυτή τείνει να μεταφέρει προς τα αριστερά τον κύλινδρο, με αποτέλεσμα να εμφανιστεί και κάθετη δύναμη N_2 από τον τοίχο, αλλά και μια δεύτερη τριβή, από τον τοίχο, η T_2. Οπότε οι δυνάμεις είναι όπως στο κάτω σχήμα.



ii) Από την ισορροπία του κυλίνδρου, παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow N_2-T_1=0 \rightarrow T_1=N_2=25N.$$

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_2+N_1+F-w=0 \quad (1)$$

$$\Sigma\tau_o=0 \rightarrow F\cdot R-T_1\cdot R-T_2\cdot R=0 \rightarrow T_2=F-T_1=3t_2-T_1=30N-25N=5N.$$

Οπότε επιστρέφοντας στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$N_1=mg-F-T_2=20\cdot 10N-30N-5N=165N$$

iii) Τη στιγμή t_1 που το άκρο Α του νήματος θα αρχίσει να κινείται προς τα πάνω ταυτίζεται με τη στιγμή που θα αρχίσει να περιστρέφεται και ο κύλινδρος. Αν πάρουμε λοιπόν την στιγμή t_1^-, ο κύλινδρος «είναι έτοιμος» να περιστραφεί, οι ασκούμενες τριβές παίρνουν τις μέγιστες δυνατές τιμές τους, γίνονται δηλαδή οριακές. (Προφανώς αν περιστραφεί ο κύλινδρος και οι δύο τριβές θα είναι τριβές ολίσθησης, οπότε δεν μπορεί η μια να γίνεται οριακή και όχι η άλλη…)

Αλλά τότε τη στιγμή αυτή έχουμε (ακόμα…) ισορροπία του κυλίνδρου, οπότε ισχύουν:

$\Sigma F_x=0 \rightarrow N_2-T_1=0 \rightarrow N_2=T_1=\mu N_1$ (2)

$\Sigma F_y=0 \rightarrow T_2+N_1+F-w=0 \rightarrow \mu N_2+N_1+F=mg$ (3)

$\Sigma \tau_o=0 \rightarrow F\cdot R-T_1\cdot R-T_2\cdot R=0 \rightarrow F-\mu N_1-\mu N_2=0$ (4)

Αντικαθιστώντας στην (4) την N_2 από (2) παίρνουμε:

$$F-\mu N_1-\mu^2 N_1=0 \rightarrow N_1=\frac{F}{\mu(1+\mu)}$$

Και η (3) γίνεται:

$$\mu^2\frac{F}{\mu(1+\mu)}+\frac{F}{\mu(1+\mu)}+F=mg \rightarrow F=\frac{\mu(\mu+1)}{2\mu^2+\mu+1}mg=75N$$

$$\boxed{F=\frac{\mu(\mu+1)}{2\mu^2+\mu+1}mg}$$

Και με αντικατάσταση βρίσκουμε: F=75N

$$\text{Αλλά } F=3t_1 \rightarrow t_1=\frac{F}{3}=25s$$

dmargaris@gmail.com