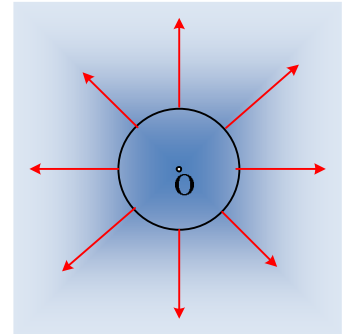
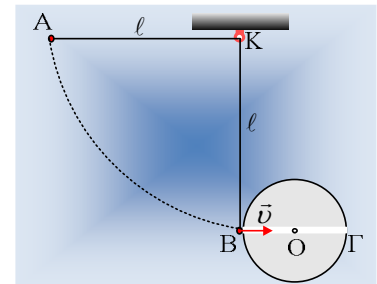


Κίνηση σε σήραγγα...

Το ηλεκτρικό πεδίο μιας αγώγιμης φορτισμένης σφαίρας περιορίζεται στο εξωτερικό της και είναι όμοιο με το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου, το οποίο θα βρισκόταν στο κέντρο της. Αν δηλαδή έχουμε μια μεταλλική σφαίρα με θετικό φορτίο Q , η μορφή του ηλεκτρικού της πεδίου είναι αυτό που παριστάνεται με τις δυναμικές γραμμές του διπλανού σχήματος.



Έστω ότι έχουμε μια ακλόνητη μεταλλική σφαίρα ακτίνας $R=0,1\text{m}$ η οποία είναι φορτισμένη με φορτίο $Q=1\text{mC}$. Ένα μικρό μεταλλικό σφαιρίδιο μάζας $m=10\text{g}$ είναι δεμένο στο άκρο μονωτικού νήματος μήκους $l=0,3\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο σε σημείο K , έχοντας φορτίο $q=-(5/24)\text{nC}$. Φέρνουμε το σφαιρίδιο στη θέση A με το νήμα τεντωμένο σε οριζόντια θέση και το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε μετά από λίγο φτάνει στη θέση B στην επιφάνεια της σφαίρας, με το νήμα κατακόρυφο. Στη θέση αυτή κόβεται το νήμα και το σφαιρίδιο έχοντας ταχύτητα v , συνεχίζει την κίνησή του στο εσωτερικό μιας μικρής οριζόντιας σήραγγας, η οποία αφού περάσει από το κέντρο O της σφαίρας καταλήγει στο σημείο Γ . Η κίνηση εντός της σήραγγας πραγματοποιείται, χωρίς τριβές.



Στη θέση αυτή κόβεται το νήμα και το σφαιρίδιο έχοντας ταχύτητα v , συνεχίζει την κίνησή του στο εσωτερικό μιας μικρής οριζόντιας σήραγγας, η οποία αφού περάσει από το κέντρο O της σφαίρας καταλήγει στο σημείο Γ . Η κίνηση εντός της σήραγγας πραγματοποιείται, χωρίς τριβές.

- i) Να υπολογίσετε τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στο σφαιρίδιο κατά την κίνησή του από τη θέση A στη θέση B .
- ii) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας v .
- iii) Με ποια ταχύτητα περνά το σφαιρίδιο από το κέντρο O της σφαίρας και με ποια ταχύτητα εξέρχεται από το άκρο Γ της σήραγγας;
- iv) Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου, η οφειλόμενη στο φορτίο που φέρει, τη στιγμή που διέρχεται από το κέντρο O της σφαίρας.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και $K=9 \cdot 10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2$.

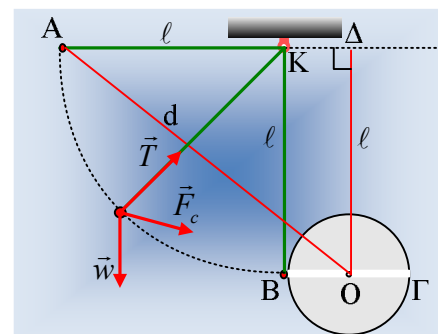
Απάντηση:

- i) Φέρνουμε την OD κάθετη στην AK και την $AO=d$. $(K\Delta)=R$, οπότε με τη βοήθεια του Π.Θ. παίρνουμε:

$$(AO) = \sqrt{(A\Delta)^2 + (\Delta O)^2} = \sqrt{(\ell + R)^2 + \ell^2} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(0,3 + 0,1)^2 + 0,3^2} \text{m} = 0,5\text{m}$$

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο σε μια τυχαία θέση, κατά την κίνησή του από το A στο



B . Από αυτές, η τάση του νήματος T , είναι κάθετη στη μετατόπιση και δεν παράγει έργο. Οι άλλες δύο,

βάρος και ηλεκτροστατική δύναμη F_c είναι συντηρητικές δυνάμεις, που το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή. Έτσι έχουμε και για τις δύο δυνάμεις:

$$W_{A \rightarrow B} = U_A - U_B$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, για το βάρος και την ηλεκτροστατική δύναμη παίρνουμε:

$$W_\beta = mgh_A - mgh_B = mgh_{AB} = 0,01 \cdot 10 \cdot 0,3J = 0,03J.$$

$$W_c = qV_A - qV_B = q(V_A - V_B) \quad (1)$$

$$\text{Όμως } V_A = K_c \frac{Q}{d} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-3}}{0,5} V = 18 \cdot 10^6 V \quad \text{και} \quad V_B = K_c \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-3}}{0,1} V = 90 \cdot 10^6 V \rightarrow$$

$$W_c = q(V_A - V_B) = -\frac{5}{24} 10^{-9} (18 - 90) \cdot 10^6 J = 0,015J$$

ii) Εφαρμόζουμε για το σφαιρίδιο το θεώρημα έργου-ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) από το Α στο Β:

$$K_B - K_A = W_w + W_{F_c} + W_T \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_w + W_{F_c} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2(W_w + W_{F_c})}{m}} = \sqrt{\frac{2(0,03 + 0,015)}{0,01}} m/s = 3m/s.$$

iii) Στο εσωτερικό της σφαίρας δεν έχουμε ηλεκτρικό πεδίο, ενώ η σήραγγα είναι οριζόντιο, οπότε ούτε το βάρος παράγει έργο, έτσι η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή και η ταχύτητα, τόσο κατά το πέρασμα από το κέντρο Ο της σφαίρας, όσο και στο σημείο εξόδου Γ έχει μέτρο $v=3m/s$.

iv) Το ότι δεν έχουμε πεδίο στο εσωτερικό του σφαιρικού αγωγού, δεν σημαίνει ότι έχουμε μηδενικό δυναμικό και μηδενική ενέργεια! Απλά το ότι το σφαιρίδιο δεν δέχεται ηλεκτρική δύναμη, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $W_F=0$ ή με βάση την (1):

$$W_c = q(V_B - V_O) = 0 \rightarrow V_O = V_B = 90 \cdot 10^6 V$$

Αλλά τότε και η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου παραμένει σταθερή και ίση με:

$$U_O = U_B = qV_B = -\frac{5}{24} 10^{-9} \cdot 90 \cdot 10^6 \approx 1,9 \cdot 10^{-3} J.$$

dmargaris@gmail.com