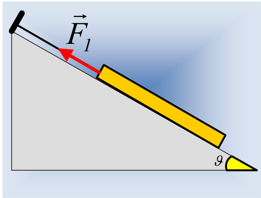
Η σανίδα και το κιβώτιο



Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα μάζας m=10kg, δεμένη με νήμα όπως στο σχήμα, παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο. Αν η τάση του νήματος έχει μέτρο F_1=50N:

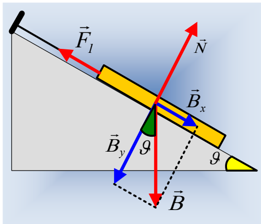
i) Να αναλύσετε το βάρος της σανίδας σε δυο συνιστώσες, μια παράλληλη και μια κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο, υπολογίζοντας τα μέτρα τους.

ii) Τοποθετούμε πάνω στη σανίδα ένα κιβώτιο της ίδιας μάζας m, το οποίο αρχίζει να ολισθαίνει προς τα κάτω. Για όσο χρόνο το κιβώτιο βρίσκεται σε επαφή με τη σανίδα, η τάση του νήματος μπορεί έχει μέτρο:

α) F_2=50N, β) 50N ≤ F_2 < 100N, γ) F_2=100N, δ) F_2>100N.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα. Το βάρος της σανίδας είναι B=mg=10·10N=100N.

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_x=0 \rightarrow B_x\text{-}F_1=0 \rightarrow B_x=F_1=50N$ *και*

$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=B_y$

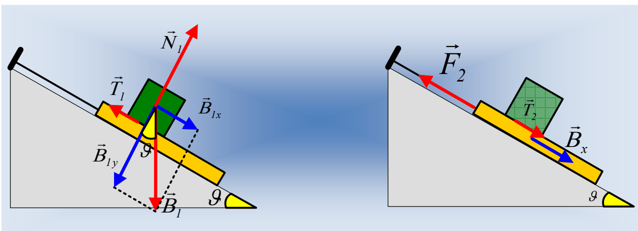
Τώρα την συνιστώσα B_y μπορούμε να την βρούμε με χρήση πυθαγορείου θεωρήματος, αφού:

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 \rightarrow B_y = \sqrt{B^2 - B_x^2} = \sqrt{100^2 - 50^2}\,N = 50\sqrt{3}N$$

Εναλλακτικά η γωνία μεταξύ βάρους και B_y είναι ίση με θ, με την κλίση του επιπέδου, οπότε B_x=B·ημθ οπότε ημθ= ½ που αντιστοιχεί σε γωνία θ=30°. Αλλά τότε:

$$B_y = B\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = 100N\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}N$$

(θα μπορούσε βέβαια η γωνία να μην προκύψει 30° αλλά μια, άγνωστου ημιτόνου. Τότε υπάρχει και η θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα ημ^{2}θ+συν^{2}θ=1, όπου οδηγεί πάλι σε πυθαγόρειο από άλλο δρόμο…)



ii) Στο πρώτο από τα παραπάνω σχήματα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο, το οποίο ολισθαίνει κατά μήκος της σανίδας, θεωρώντας ότι εμφανίζεται μεταξύ κιβωτίου και σανίδας, τριβή ολίσθησης T_1. Από τη στιγμή που η μάζα του κιβωτίου είναι επίσης m, οι συνιστώσες B_{1x} και B_{1y} έχουν μέτρα ίδια με τις αντίστοιχες συνιστώσες του βάρους της σανίδας. Εφόσον όμως το κιβώτιο ολισθαίνει κατά μήκος της σανίδας, πρέπει να υπάρχει συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση x. Αυτό σημαίνει ότι η τριβή T_1 που δέχεται από τη σανίδα είναι τριβή ολίσθησης με μέτρο μικρότερο της συνιστώσας B_{1x}, σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα, οπότε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow B_{1x} - T_1 = m\alpha > 0$$

Αλλά τότε $B_{1x} > T_1$ οπότε και $B_x > T_1$ ή αλλιώς $T_1 < 50N$

Αν έρθουμε τώρα στη σανίδα (δεύτερο σχήμα), αυτή ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_2 - B_x - T_2 = 0 \rightarrow$$

$$F_2 = B_x + T_2 = B_x + T_1 \ (1)$$

Τι μας λέει η τελευταία σχέση; Η συνιστώσα B_x έχει μέτρο B_x=50N ενώ η τριβή μπορεί να πάρει τιμές από μηδέν (να μην εμφανίζεται τριβή) έως και μια μέγιστη τιμή, η οποία πρέπει να είναι όμως μικρότερη των 50N. Αλλά τότε η δύναμη F_2 (η νέα τάση του νήματος) μπορεί να πάρει τιμές από 50N μέχρι και 100N (χωρίς να γίνεται όμως ίση με 100N). Έτσι η (1) μετασχηματίζεται στην:

$$50N \leq F_2 < 100N$$

Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com