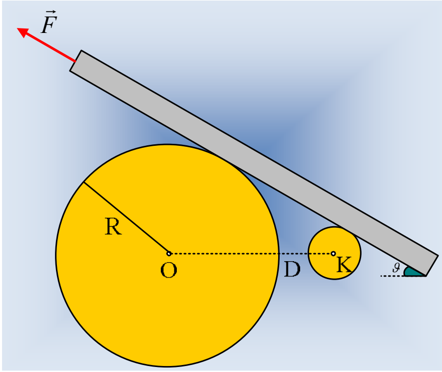
Η ράβδος σε επαφή με δυο κυλίνδρους



Σε ένα κατακόρυφο τοίχο έχουν στηριχθεί οι οριζόντιοι άξονες δυο ομογενών κυλίνδρων του ίδιου ύψους, οι οποίοι περνούν από τα κέντρα Ο και Κ των δύο βάσεών τους. Οι κύλινδροι μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από τους άξονές τους. Ο μεγάλος κύλινδρος έχει μάζα Μ και ακτίνα R=0,4m, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ είναι οριζόντιο με μήκος (ΟΚ)=D=0,6m. Μια ράβδος, με μάζα επίσης Μ, ισορροπεί σε επαφή με τους δυο κυλίνδρους οι οποίοι δεν περιστρέφονται, με την επίδραση δύναμης παράλληλης προς τον κατά μήκος άξονα της ράβδου και μέτρου F=40Ν, ενώ σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία θ=30°, όπως στο σχήμα

i) Να υπολογιστεί η μάζα Μ της ράβδου και του μεγάλου κυλίνδρου.

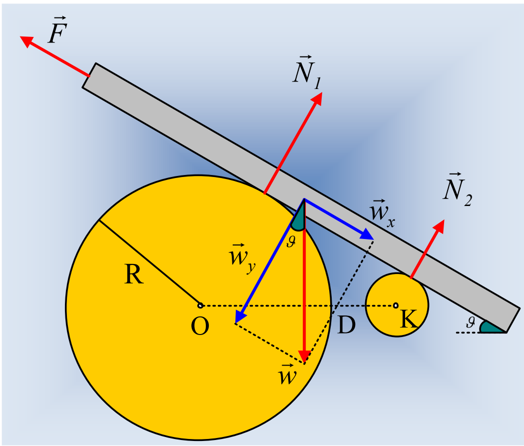
ii) Να βρεθεί η ακτίνα r του μικρού κυλίνδρου καθώς και η μάζα του m.

iii) Αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο και παρατηρούμε ότι δεν ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή μαζί τους. Να βρεθεί η επιτάχυνση με την οποία κινείται.

iv) Να βρεθούν οι δυνάμεις τριβής που ασκούνται στους κυλίνδρους από την ράβδο.

Δίνεται ότι οι κύλινδροι είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό, η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονά του I= ½ m·R^2 και g=10m/s^2.

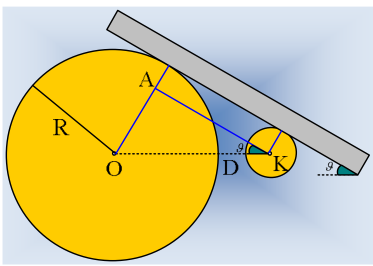
Απάντηση:



i) Η ράβδος ισορροπεί, ενώ οι κύλινδροι δεν στρέφονται. Αλλά για να ισορροπούν οι κύλινδροι, δεν πρέπει να ασκείται δύναμη τριβής πάνω τους, αφού η ύπαρξη τριβής θα τους έθετε σε περιστροφή. Έτσι οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι αυτές του διπλανού σχήματος, όπου οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ράβδου-κυλίνδρων είναι κάθετες στις επιφάνειες επαφής (N_1 και N_2). Έτσι από την ισορροπία της ράβδου στη διεύθυνση του άξονα x (παράλληλος στη ράβδο) παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \text{ ή } F-w_x=0 \text{ ή } F=Mg\cdot\eta\mu\theta \rightarrow$$

$$M=\frac{F}{g\cdot\eta\mu\theta}=\frac{40}{10\cdot{}^{1}\!/_{2}}kg=8kg$$



ii) Φέρνουμε τις ακτίνες των κυλίνδρων τις κάθετες στη ράβδο και από το Κ την ΚΑ κάθετη στην ακτίνα του μεγάλου κυλίνδρου. Τότε (ΑΟ)=R-r, ενώ η γωνία ΑΚΟ είναι ίση με θ. Οπότε:

$$\eta\mu\theta = \frac{(OA)}{(OK)} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R-r}{D} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{0{,}4-r}{0{,}6} \rightarrow r = 0{,}1m$$

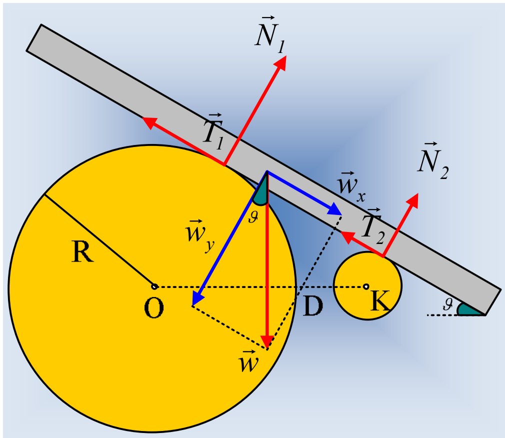
Αν ρ η πυκνότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένοι οι κύλινδροι, τότε η μάζα του μεγάλου κυλίνδρου με ύψος h υπολογίζεται:

$$M=\rho V=\rho\cdot A\cdot h=\rho\cdot\pi R^2\cdot h.$$

Αντίστοιχα για το μικρό κύλινδρο $m=\rho\cdot\pi r^2\cdot h$. Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho\cdot\pi r^2 A}{\rho\cdot\pi R^2 A} \rightarrow m = M\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 8\left(\frac{0{,}1}{0{,}4}\right)^2 Kg = 0{,}5Kg$$

iii) Αφού δεν ολισθαίνει η ράβδος πάνω στους κυλίνδρους, οι ασκούμενες δυνάμεις τριβής, είναι στατικές τριβές, όπου στην ράβδο έχουν την κατεύθυνση, όπως στο πάνω σχήμα. Οι αντιδράσεις T_1' και T_2' ασκούνται στους κυλίνδρους και τους θέτουν σε περιστροφή, προκαλώντας την γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσουν (κάτω σχήμα). Εφαρμόζοντας τώρα το 2^{o} νόμο του Νεύτωνα για τα τρία σώματα θα έχουμε:



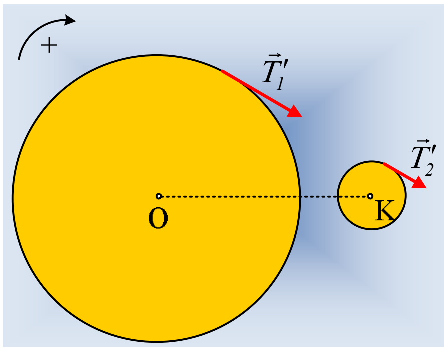
Ράβδος: $\Sigma F_x=M\cdot\alpha \rightarrow Mg\cdot\eta\mu\theta - T_1 - T_2 = M\cdot\alpha$ (1)

Μεγάλος κύλινδρος: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1'R= \frac{1}{2} MR^2\cdot\alpha_{1,\gamma\omega\nu}$

$T_1'= \frac{1}{2} MR\cdot\alpha_{1,\gamma\omega\nu}$ (2)

Μικρός κύλινδρος: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_2'r= \frac{1}{2} Mr^2\cdot\alpha_{2,\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$T_2'= \frac{1}{2} mr\cdot\alpha_{2,\gamma\omega\nu}$ (3)



Αλλά αφού δεν έχουμε ολίσθηση τα σημεία επαφής της ράβδου έχουν, κάθε στιγμή, ταχύτητα, ίση με τη γραμμική ταχύτητα των κυλίνδρων, λόγω περιστροφής. Δηλαδή:

$$\upsilon = \omega_1 R = \omega_2 r \rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\omega_1 R}{dt} = \frac{d\omega_2 r}{dt} \rightarrow$$

$$\alpha= \alpha_{1,\gamma\omega\nu}\cdot R=\alpha_{2,\gamma\omega\nu}\cdot r$$

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) και με χρήση της παραπάνω σχέσης παίρνουμε:

$$Mg\cdot\eta\mu\theta=M\alpha+ \tfrac{1}{2} M\alpha + \tfrac{1}{2} m\alpha \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{Mg\eta\mu\theta}{\frac{3}{2}M + \frac{1}{2}m} = \frac{8\cdot 10\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}8 + \frac{1}{2}0{,}5} m/s^2 \approx 3{,}3m/s^2.$$

iv) Με αντικατάσταση στις σχέσεις (2) και (3) βρίσκουμε:

$$T_1 = T_1' = ½\, MR·α_{1,γων} = ½\, Mα = ½\, 8·3,3N ≈ 13N$$

$$T_2 = T_2' = ½\, mr·α_{2,γων} = ½\, mα = ½\, 0,5·3,3N ≈ 0,8N.$$

dmargaris@gmail.com