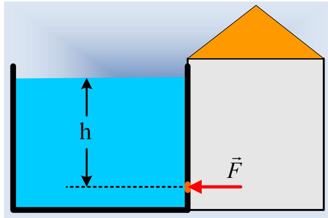
Αντιστοιχίσεις και μοντέλα.



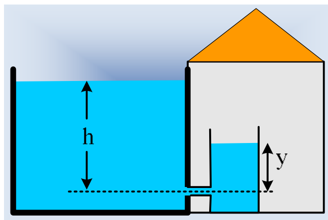
Έχουμε μια μεγάλη ανοικτή δεξαμενή, στην πλευρική πλευρά της οποίας υπάρχει ένα δωμάτιο το οποίο μπορεί να κλείνεται αεροστεγώς. Σε βάθος h=5m από την επιφάνεια της δεξαμενής υπάρχει μια μικρή οπή εμβαδού $A=2cm^2$, η οποία κλείνεται με μια τάπα, η οποία μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Για την ισορροπία της τάπας και την μη εκροή νερού από την οπή, απαιτείται η άσκηση οριζόντιας δύναμης F, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F, αν η πίεση στο δωμάτιο είναι ίση με την ατμοσφαιρική $p_{ατ}=10^5Pa$.

ii) Αυξάνουμε την πίεση στο εσωτερικό του δωματίου στην τιμή $p_1=1{,}5\cdot 10^5 N/m^2$. Πόση οριζόντια δύναμη πρέπει να ασκούμε στην τάπα για την ισορροπία της;

iii) Ανοίγουμε το δωμάτιο οπότε η πίεση στο εσωτερικό του, γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική. Αφαιρούμε την τάπα. Ποια η ταχύτητα εκροής, μόλις αποκατασταθεί μόνιμη ροή;

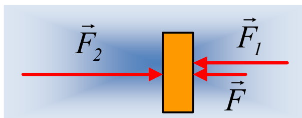
iv) Κλείνουμε ξανά την οπή, κλείνουμε και το δωμάτιο και αυξάνουμε την πίεση στο εσωτερικό του στην τιμή $p_2=1{,}18\cdot 10^5Pa$. Στη συνέχεια αφαιρούμε την τάπα. Να βρεθεί η ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή.



v) Ανοίγουμε το δωμάτιο και συνδέουμε ένα μικρό σωλήνα στην οπή, ο οποίος μεταφέρει νερό σε ένα μεγάλο δοχείο όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής τη στιγμή που το νερό έχει ανέβει στο δοχείο σε ύψος y=1,8m.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό πυκνότητας $ρ=1.000kg/m^3$, οι ροές μόνιμες, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στην εσωτερική πλευρά της τάπας η πίεση έχει τιμή $p=p_{ατμ}+ρgh$, οπότε η τάπα δέχεται δύναμη από το νερό μέτρου:

$$F_2=p\cdot A= (p_{ατ}+ρgh)A$$

Από την ισορροπία λοιπόν του εμβόλου, το οποίο δέχεται και δύναμη λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης στην δεξιά πλευρά της τάπας, έχουμε:

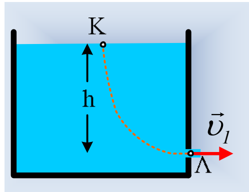
$$F_2=F+F_1 \rightarrow F=F_2-F_1 =(p_{ατ}+ρgh)A-p_{ατ}\cdot A=ρgh\cdot A =1.000\cdot 10\cdot 5\cdot 2\cdot 10^{-4}N=10N.$$

ii) Με την ίδια λογική έχουμε:

$$F'=F_2-F_1 =(p_{ατ}+ρgh)A-p_1\cdot A=(p_{ατ}+ ρgh-p_1) \cdot A = (10^5+ 1.000\cdot 10\cdot 5-1{,}5\cdot 10^5)A=0!$$

Δηλαδή δεν χρειάζεται να ασκήσουμε κάποια δύναμη για να μην μετακινηθεί η τάπα και να μην χυθεί το νερό από την οπή. Μπορούμε, αν θέλουμε, να αφαιρέσουμε την τάπα. Το νερό δεν θα χυθεί…

iii) Εφαρμόζουμε το νόμο Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ στην επιφάνεια της δεξαμενής και του σημείου Λ στην οπή και παίρνουμε:



$$p_K + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

Οπότε θεωρώντας $\upsilon_K=0$, $p_K=p_\Lambda=p_{\alpha\tau}$, παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = \rho gh \rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5}m/s = 10m/s$$

iv) Εφαρμόζουμε ξανά όπως προηγουμένως το νόμο Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ στην επιφάνεια της δεξαμενής και του σημείου Λ στην οπή και παίρνουμε:

$$p_K + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Οπότε θεωρώντας $\upsilon_K=0$, $p_K=p_{\alpha\tau}$ και $p_\Lambda=p_2$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = (p_{\alpha\tau} - p_2) + \rho gh$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(p_{\alpha\tau} - p_2)}{\rho} + 2gh}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(p_{\alpha\tau} - p_2)}{\rho} + 2gh} = \sqrt{\frac{2\left(10^5 - 1{,}18\cdot 10^5\right)}{1.000} + 2\cdot 10\cdot 5}m/s = 8m/s$$

v) Επαναλαμβάνουμε την εφαρμογή του νόμου Bernoulli μεταξύ ενός σημείου Κ στην επιφάνεια της δεξαμενής και του σημείου Λ στην οπή και παίρνουμε:

$$p_K + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2$$

Οπότε θεωρώντας $\upsilon_K=0$, $p_K=p_{\alpha\tau}$ και $p_\Lambda=p_{\alpha\tau\mu}+\rho gy$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 = \rho g(h-y)$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h-y)}$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{2\cdot 10\cdot(5-1{,}8)}m/s = 8m/s$$

Σχόλιο:

Μπορούμε να προσέξουμε τα αποτελέσματα και την κατάσταση που περιγράφουν τα δυο τελευταία ερωτήματα.

Στο iv) το νερό από τη δεξαμενή εκρέει σε ένα ρευστό (αέρα) όπου η πίεση στο σημείο εξόδου είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική, με αποτέλεσμα η ταχύτητα να είναι μικρότερη από αυτή που εκρέει σε ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι έχουμε $υ_2$=8m/s, αντί 10m/s.

Στο v) την αυξημένη πίεση τη δημιουργεί το νερό του δοχείου. Και πάλι έχουμε εκροή σε ρευστό (νερό) με πίεση στο σημείο εξόδου επίσης αυξημένη, λόγω «υδροστατικής πίεσης»…

Πού τελειώνει η ροή; Και στο ένα και στο άλλο το πρόβλημα αντιμετωπίσθηκε με τον ίδιο τρόπο. Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli από την επιφάνεια της δεξαμενής στο άκρο του σωλήνα ή της οπής, χωρίς να μας απασχολεί τι θα γίνει όταν το νερό βγει στον αέρα με αυξημένη πίεση ή στο νερό που προκαλεί την πίεση αυτή…

dmargaris@gmail.com