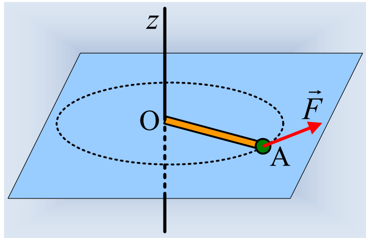
Ένα σύστημα σωμάτων σαν στερεό.



Στο άκρο Α μιας ομογενούς ράβδου μήκους l=2m και μάζας M=6kg, έχει προσκολληθεί ένα σώμα Σ μάζας m=1kg, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, δημιουργώντας ένα στερεό s. Το στερεό s ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, που περνά από το άλλο άκρο Ο της ράβδου. Σε μια στιγμή $t_0=0$ στο σώμα Σ ασκείται μια σταθερού μέτρου δύναμη F=3N, η οποία είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο, με αποτέλεσμα το στερεό s να αρχίσει να περιστρέφεται. Να βρεθούν:

i) Η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού s.

ii) Η ταχύτητα του σώματος Σ τη στιγμή $t_1=10s$.

iii) Η στροφορμή τη στιγμή t_1 κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του σώματος Σ, β) της ράβδου, γ) του στερεού s.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του σώματος Σ, β) της ράβδου, γ) του στερεού s.

v) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στη ράβδο της στιγμή t_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=(1/12)ml^2$.

Απάντηση:

Η ροπή αδράνειας του στερεού s ως προς τον άξονα z είναι ίση:

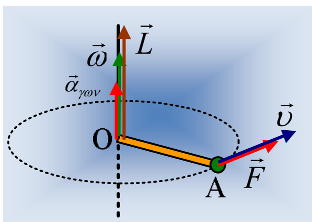
$$I_s = I_\rho + I_\Sigma = \left(I_{\rho,cm} + Md^2\right) + m\ell^2 = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right) + m\ell^2 \rightarrow$$

$$I_s = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 = \frac{1}{3}6\cdot 2^2 kg\cdot m^2 + 1\cdot 2^2 kg\cdot m^2 = 12kg\cdot m^2.$$

i) Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Νεύτωνα για το στερεό s παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_s\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{F\ell}{I_s} = \frac{3\cdot 2}{12}rad/s^2 = 0{,}5rad/s^2.$$

Με διεύθυνση αυτή του άξονα και φορά προς τα πάνω.



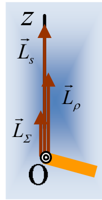
ii) Τη στιγμή t_1 το στερεό έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=0{,}5\cdot 10rad/s=5rad/s.$$

Οπότε το σώμα Σ έχει ταχύτητα:

$$\upsilon = \upsilon_1 = \omega\cdot\ell = 5\cdot 2m/s = 10m/s$$

iii) Για τις στροφορμές ως προς τον άξονα z, τη στιγμή t_1, έχουμε:



α) Του σώματος Σ:

$$L_\Sigma = m\upsilon R = m\cdot\upsilon\cdot\ell = 1\cdot 10\cdot 2kgm^2/s = 20kgm^2/s.$$

β) Της ράβδου:

$$L_\rho = I_{\rho,O}\cdot\omega = \frac{1}{3}M\ell^2\cdot\omega = \frac{1}{3}6\cdot 2^2\cdot 5kgm^2/s = 40kgm^2/s.$$

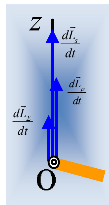
γ) Του στερεού:

$$L_s = I_{s,O}\cdot\omega = 12\cdot 5kgm^2/s = 60kgm^2/s.$$

Και οι τρεις παραπάνω στροφορμές έχουν τη διεύθυνση του άξονα z και φορά προς τα πάνω. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η στροφορμή του στερεού s δεν είναι τίποτα άλλο παρά το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των επιμέρους σωμάτων (ράβδος- σώμα Σ):

$$\vec{L}_s = \vec{L}_\rho + \vec{L}_\Sigma$$

iv) Για τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα z έχουμε:



α) Του σώματος Σ:

$$\frac{dL_\Sigma}{dt} = \frac{d(m\upsilon\ell)}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt}\ell = m\alpha_\Sigma\ell = ma_{\gamma\omega\nu}\ell\cdot\ell = m\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}.\rightarrow$$

$$\frac{dL_\Sigma}{dt} = m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} = 1\cdot 2^2\cdot 0{,}5kgm^2/s^2 = 2kgm^2/s^2.$$

β) Της ράβδου:

$$\frac{dL_\rho}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{3}M\ell^2\cdot\omega\right)}{dt} = \frac{1}{3}M\ell^2\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{3}M\ell^2\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{3}6\cdot 2^2\cdot 0{,}5kgm^2/s^2 = 4kgm^2/s^2.$$

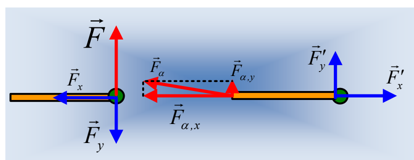
γ) Του στερεού:

$$\frac{dL_s}{dt} = \frac{d(I_s\cdot\omega)}{dt} = I_s\frac{d\omega}{dt} = I_s\alpha_{\gamma\omega\nu} = 12\cdot 0{,}5kgm^2/s^2 = 6kgm^2/s^2.$$

Οι ρυθμοί αυτοί είναι επίσης διανύσματα πάνω στον άξονα z. Και εδώ ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \frac{d\vec{L}_\rho}{dt} + \frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt}$$

v) Στο διπλανό σχήμα, έχουμε πάρει σε κάτοψη, τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ (αριστερά) και στη ράβδο (δεξιά) τη στιγμή t_1. (Δεν έχουν σχεδιαστεί οι κατακόρυφες δυνάμεις, βάρη και δυνάμεις στήριξης από το επίπεδο). Η διεύθυνση x είναι ο άξονας της ράβδου και y, η κάθετη διεύθυνση. F_x και F_y είναι οι δυο συνιστώσες της δύναμης που ασκεί η ρά-



βδος στο σώμα Σ, ενώ οι αντιδράσεις τους F'_x και F'_y ασκούνται στη ράβδο. Εξάλλου $F_{\alpha,x}$ και $F_{\alpha,y}$ οι αντίστοιχες συνιστώσες της δύναμης που ασκεί ο άξονας στη ράβδο.

Στη διεύθυνση της ακτίνας (διεύθυνση x) το σώμα Σ εκτελεί κυκλική κίνηση, οπότε:

$$\Sigma F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \rightarrow F_x = m\frac{\upsilon^2}{\ell} = 1\frac{10^2}{2}N = 50N$$

Στην ίδια διεύθυνση για τη ράβδο, αφού το κέντρο μάζας της εκτελεί επίσης κυκλική κίνηση ακτίνας $R=½\ \ell$ θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\frac{\upsilon_{cm}^2}{R} \rightarrow F_{\alpha,x} - F'_x = M\omega^2\frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$F_{\alpha,x} = F'_x + M\omega^2\frac{\ell}{2} = 50N + 6\cdot 5^2\cdot 1N = 200N$$

Στην διεύθυνση του άξονα y, το σώμα Σ εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση:

$\alpha_y=\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R=1m/s^2$, οπότε:

$$\Sigma F_{y,\Sigma}=m\alpha_y \rightarrow F\text{-}F_y=m\alpha_y \rightarrow F_y=F\text{-}m\alpha_y=3N\text{-}1\cdot 1N=2N$$

Στην ίδια διεύθυνση, για τη ράβδο:

$$\Sigma F_{y,\rho}=m\alpha_{cm,y} \rightarrow F'_y + F_{\alpha,y} = M\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$F_{\alpha,y} = M\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2} - F'_y = 6\cdot 0{,}5\cdot 1N - 2N = 1N$$

Αλλά τότε η δύναμη από τον άξονα έχει μέτρο:

$$F_\alpha = \sqrt{F_{\alpha,x}^2 + F_{\alpha,y}^2} = \sqrt{200^2 + 1^2}N \approx 200N$$

dmargaris@gmail.com