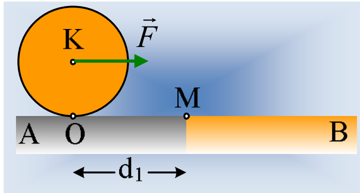
Ένας κύλινδρος σε δύο επίπεδα



Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας 100kg και ακτίνας R=0,5m, ηρεμεί στο σημείο Ο ενός οριζοντίου επιπέδου Α, απέχοντας απόσταση d_1=5m από το σημείο Μ, όπου το επίπεδο Α δίνει τη θέση του σε ένα δεύτερο λείο οριζόντιο Β. Σε μια στιγμή ασκείται στο κέντρο Κ του κυλίνδρου μια σταθερή οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα να αρχίσει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και τη στιγμή t_1=5s να φτάνει στο σημείο Μ.

i) Να εξηγήσετε γιατί το επίπεδο Α δεν είναι λείο.

ii) Να υπολογίσετε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, καθώς και την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή t_1.

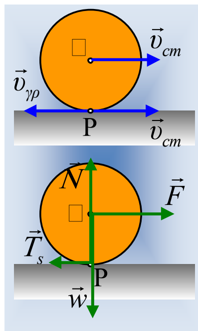
iii) Θα συνεχιστεί η κύλιση και κατά την κίνησή του στο επίπεδο Β; Να δικαιολογήσετε αναλυτικά την απάντησή σας.

iv) Να βρείτε πόσο απέχει από την αρχική του θέση, το κέντρο Κ του κυλίνδρου, τη στιγμή t_2=10s.

v) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της γωνιακής ταχύτητας και της ταχύτητας του κέντρου Κ, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή t_2.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του (οριζόντιος άξονας που ενώνει τα κέντρα των βάσεών του) I= ½ mR^2.

Απάντηση:



i) Θεωρούμε την κίνηση του κυλίνδρου σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική γύρω από τον άξονα περιστροφής του, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Κ. Για να κυλίεται ο κύλινδρος, θα πρέπει το εκάστοτε σημείο επαφής του με το επίπεδο (σημείο Ρ) να έχει μηδενική ταχύτητα. Αλλά αφού ο κύλινδρος κινείται προς τα δεξιά, έχοντας αποκτήσει μια ταχύτητα υ_{cm} θα πρέπει ταυτόχρονα να στρέφεται ωρολογιακά, έτσι ώστε το σημείο Ρ, εκτός της υ_{cm} να έχει και μια ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$ με κατεύθυνση όπως στο σχήμα, για να μπορεί να ισχύει $\upsilon_P=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho}=0$. Αλλά για να περιστραφεί ο κύλινδρος απαιτείται η ύπαρξη ροπής ως προς τον άξονα περιστροφής του και η μόνη δυνατή επιλογή είναι να δεχτούμε ότι αναπτύσσεται στατική τριβή T_s, η ροπή της οποίας επιταχύνει στροφικά τον κύλινδρο.

ii) Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για τη σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου, θεωρώντας θετική την προς τα δεξιά φορά, καθώς και την ωρολογιακή περιστροφή, μας δίνει:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\alpha_{cm} \rightarrow F\text{-}T_s=m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_sR = ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s = ½\, mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (1)

Ενώ αφού έχουμε κύλιση ισχύει και $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ (3) και επιλύοντας το σύστημα παίρνουμε:

$$F=\frac{3}{2}ma_{cm}\ (4)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι το κέντρο μάζας Κ του κυλίνδρου κινείται με σταθερή επιτάχυνση, αφού το μέτρο της δύναμης παραμένει σταθερό. Αλλά τότε η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία ισχύουν:

$$\upsilon=\alpha_{cm}\cdot t\ (5) \quad \text{και} \quad \Delta x_1=½\,\alpha_{cm}\cdot t^2\ (6)$$

Από την (6) για t=5s και $\Delta x_1=d_1=5m$ παίρνουμε:

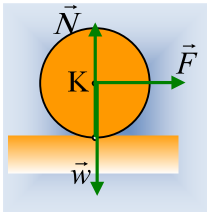
$$\alpha_{cm}=\frac{2\Delta x_1}{t^2}=\frac{2\cdot 5}{5^2}m/s^2=0{,}4m/s^2.\ \text{Οπότε:}$$

$$F=\frac{3}{2}ma_{cm}=\frac{3}{2}100\cdot 0{,}4N=60N$$

Ενώ τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στο Μ έχει ταχύτητα κέντρου μάζας:

$$\upsilon_1=\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t_1=0{,}4\cdot 5m/s=2m/s.$$

iii) Μόλις ο κύλινδρος περάσει στο Β επίπεδο, παύει να δέχεται δύναμη τριβής, αλλά τότε δεν θα υπάρχει κατάλληλη ροπή που θα μπορούσε να εξασφαλίσει την επιταχυνόμενη στροφική κίνησή του, με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα να παραμένει σταθερή, ενώ αντίθετα μεταφορικά ο κύλινδρος συνεχίζει να επιταχύνεται. Αλλά τότε ο κύλινδρος παύει την κύλισή του. Τι κάνει; Επιταχύνεται προς τα δεξιά και στρέφεται δεξιόστροφα, οπότε έχουμε μια σύνθετη κίνηση με ολίσθηση.



Για την νέα επιτάχυνση έχουμε:

$$\Sigma F=m\alpha_{cm,1}\rightarrow \alpha_{cm,1}=\frac{F}{m}=\frac{60}{100}m/s^2=0{,}6m/s^2.$$

iv) Για την κίνηση του κυλίνδρου στο λείο οριζόντιο επίπεδο θα έχουμε:

$$\upsilon=\upsilon_1+\alpha_{cm,1}\cdot\Delta t \quad \text{και} \quad \Delta x_2=\upsilon_1\cdot\Delta t+½\,\alpha_{cm,1}\cdot(\Delta t)^2$$

Οπότε τη στιγμή t_2=10s, όπου Δt=10s-5s=5s θα έχουμε:

$$\upsilon=\upsilon_2=\upsilon_1+\alpha_{cm,1}\cdot\Delta t=2m/s+0{,}6\cdot 5m/s=5m/s\ \text{και}$$

$$\Delta x_2=\upsilon_1\cdot\Delta t+½\,\alpha_{cm,1}\cdot(\Delta t)^2=2\cdot 5m+½\,0{,}6\cdot 5^2m=17{,}5m$$

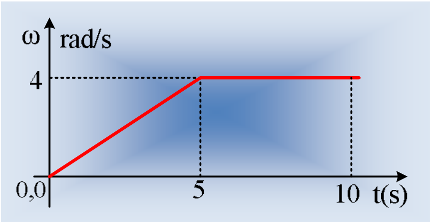
Συνεπώς τη στιγμή αυτή, το κέντρο μάζας Κ του κυλίνδρου, απέχει από την αρχική του θέση, κατά:

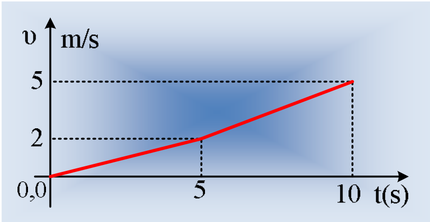
$$x=\Delta x_1+\Delta x_2=5m+17{,}5\ m=22{,}5m.$$

v) Τη στιγμή t_1 που η ταχύτητα έχει μέτρο ίσο με 2m/s, ο κύλινδρος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega=\upsilon_1/R=2/0{,}5rad/s=4rad/s.$$

Αλλά όλο το προηγούμενο χρονικό διάστημα, από την ισότητα $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ προκύπτει ότι στροφικά κινήθηκε με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, εκτελώντας στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, για την οποία θα ισχύει $ω=α_{γων}·t$, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, οπότε το ζητούμενο διάγραμμα είναι όπως στο πρώτο διάγραμμα:





Ενώ αντίθετα το κέντρο μάζας είχε σταθερές επιταχύνσεις, τόσο μεταξύ 0-5s, όσο και μεταξύ 5s-10s, με αντίστοιχο διάγραμμα το δεύτερο από τα παραπάνω διαγράμματα.

dmargaris@gmail.com