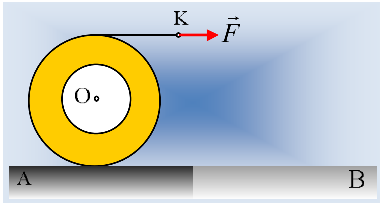
Ένας δακτύλιος σε δύο επίπεδα



Από έναν συμπαγή και ομογενή δίσκο ακτίνας R=0,5m, αφαιρούμε το ομόκεντρο τμήμα του ακτίνας R_1, οπότε προκύπτει ένας δακτύλιος μάζας m=8kg. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του, δίνεται από την εξίσωση $I_{cm}=\lambda mR^2$. Γύρω από το δακτύλιο αυτό τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο Α με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}05$. Κάποια στιγμή $t_0=0$, τραβάμε το άκρο Κ του νήματος, ασκώντας του οριζόντια δύναμη F, μέτρου F=1,8N με αποτέλεσμα ο δακτύλιος να κυλίεται.

Τη στιγμή $t_1=2s$ ο δακτύλιος, αφού έχει μετατοπισθεί κατά $x_1=0{,}5m$, περνά σε ένα δεύτερο λείο επίπεδο Β, ενώ συνεχίζεται η εξάσκηση της δύναμης F. Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο του δακτυλίου τη στιγμή t_1.

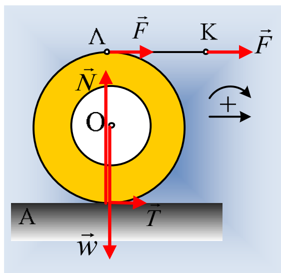
ii) Ο συντελεστής λ και η ροπή αδράνειας του δακτυλίου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, καθώς και η τριβή που ασκείται στο δακτύλιο.

iii) Η ταχύτητα του σημείου επαφής του δακτυλίου με το επίπεδο Β τη στιγμή $t_2=4s$, καθώς και η ταχύτητα του άκρου Κ του νήματος, την ίδια στιγμή.

iv) Η μέγιστη δύναμη F, που θα μπορούσε να ασκηθεί μέσω του νήματος στον κύλινδρο, χωρίς αυτός να ολισθήσει στο επίπεδο Α.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο δακτύλιο, κατά την κίνησή του στο επίπεδο Α, όπου μέσω του νήματος η δύναμη F μεταφέρεται και ασκείται εφαπτομενικά στο σημείο Λ του δακτυλίου. Θεωρώντας την κίνηση του δακτυλίου ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο Ο, με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε (θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, όπως και θετική φορά περιστροφής την ωρολογιακή φορά):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\alpha_{cm} \rightarrow F+T=m\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R\text{-}T\cdot R=\lambda mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\text{-}T=\lambda mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Ενώ αφού ο δακτύλιος κυλίεται $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ (3)

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη την (3) παίρνουμε:

$$2F=(1+\lambda)m\cdot\alpha_{cm} \quad (4)$$

Η σχέση (4) μας λέει ότι ο κέντρο μάζας Ο αποκτά σταθερή επιτάχυνση α_{cm}, συνεπώς η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία ισχύουν:

$$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t \ (5) \quad \text{και} \quad \Delta x= ½\ \alpha_{cm}t^2. \ (6)$$

Από την σχέση (6) παίρνουμε:

$$\alpha_{cm}=\frac{2\cdot\Delta x}{t^2}=\frac{2\cdot 0,5}{2^2}m/s^2=0,25m/s^2.$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (5) παίρνουμε:

$$\upsilon_{cm,1}=\alpha_{cm}\cdot t_1=0,25\cdot 2m/s=0,5m/s.$$

ii) Λύνοντας τη σχέση (4) ως προς λ παίρνουμε:

$$2F=(1+\lambda)m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \lambda=\frac{2F}{m\alpha_{cm}}-1=\frac{2\cdot 1,8}{8\cdot 0,25}-1=0,8$$

Οπότε η ροπή αδράνειας είναι ίση:

$$I_{cm}=\lambda mR^2=0,8\cdot 8\cdot 0,5^2 kg\cdot m^2=1,6\ kg\cdot m^2.$$

Ενώ από την (1) υπολογίζουμε:

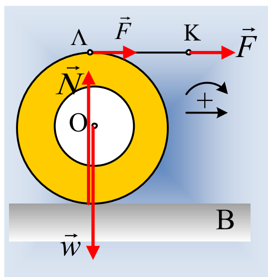
$$T=m\alpha_{cm}-F=8\cdot 0,25N-1,8N=0,2N$$

Αν υπολογίζαμε την μέγιστη δυνατή στατική τριβή (την οριακή τριβή) θα βρίσκαμε:

$$T_{o\rho}=\mu_s\cdot N=\mu_s\cdot mg=0,05\cdot 8\cdot 10N=4N$$

Πολύ μεγαλύτερη από την απαιτούμενη για κύλιση, συνεπώς δεν δημιουργείται κάποιο πρόβλημα στην κύλιση και σ την εμφάνιση στατικής τριβής μέτρου 0,2N.

iii) Μόλις ο δακτύλιος περάσει στο Β επίπεδο, παύει να ασκείται δύναμη τριβής και εφαρμόζοντας ξανά το 2ο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:



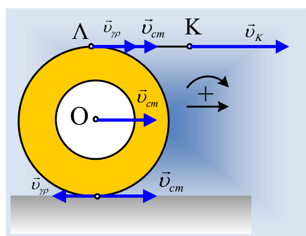
Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\alpha_{cm} \rightarrow F=m\alpha_{cm,1}$ (1α)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot R=\lambda mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,1} \rightarrow F=\lambda mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu,1}$ (2α)

Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\alpha_{cm,1}=\frac{F}{m}=\frac{1,8}{8}m/s^2=\frac{9}{40}m/s^2.$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1}=\frac{F}{\lambda mR}=\frac{1,8}{0,8\cdot 8\cdot 0,5}rad/s^2=\frac{9}{16}rad/s^2.$$



Τη στιγμή t_1 το κέντρο Ο έχει ταχύτητα $\upsilon_{cm,1}$=0,5m/s, ενώ η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου είναι ίση με $\omega_1=\frac{\upsilon_{cm,1}}{R}=\frac{0,5}{0,5}rad/s=1rad/s$

Έτσι τη στιγμή t_2 η ταχύτητα κέντρου μάζας έχει τιμή:

$$\upsilon_{cm,2} = \upsilon_{cm,1} + \alpha_{cm,1}(t - t_1) = \left(0{,}5 + \frac{9}{40}2\right)m/s = \frac{19}{20}m/s$$

Ενώ $\upsilon_{\gamma\rho,2}=\omega R=(\omega_1+\alpha_{\gamma\omega\nu,1}\cdot(t-t_1))R\rightarrow$

$$\upsilon_{\gamma\rho,2} = \left(1 + \frac{9}{16}2\right)\cdot 0{,}5 = \frac{17}{16}m/s$$

Με βάση τις τιμές αυτές:

Το άκρο του νήματος Κ έχει κάθε στιγμή, ίδια ταχύτητα με το σημείο Λ του δακτυλίου, συνεπώς:

$$\upsilon_K = \upsilon_\Lambda = \upsilon_{cm,2} + \upsilon_{\gamma\rho,2} = \frac{19}{20}m/s + \frac{17}{16}m/s \approx 2m/s$$

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm,2} - \upsilon_{\gamma\rho,2} = \frac{19}{20}m/s - \frac{17}{16}m/s = -0{,}11m/s.$$

iv) Αν αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης F, θα αυξάνεται τόσο η στατική τριβή, όσο και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Αλλά η μέγιστη τιμή της ασκούμενης στατικής τριβής είναι $T_{o\rho}$=4Ν και αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$2T_{o\rho}=m(1-\lambda)\alpha_{cm,max}\rightarrow$$

$$\alpha_{cm,max} = \frac{2T_{o\rho}}{(1-\lambda)m} = \frac{2\cdot 4}{0{,}2\cdot 8}m/s^2 = 5m/s^2.$$

Και επιστρέφοντας στην εξίσωση (1) βρίσκουμε:

$$F_{max} + T_{o\rho} = m\alpha_{cm,max} \rightarrow F_{max} = m\alpha_{cm,max} - T_{o\rho} = 8\cdot 5N - 4N = 36N$$

dmargaris@gmail.com