Άλλη μια σύνθεση ταλαντώσεων

Ένα σώμα μάζας 0,2kg ταλαντώνεται με εξίσωση:

$$y = 5 \cdot \eta\mu(2\pi t) + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) + \sqrt{2}\eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \ (cm)$$

i) Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου και να υπολογίστε το πλάτος και την αρχική φάση της απομάκρυνσης.

ii) Τη χρονική στιγμή t_1=0,25s να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

Απάντηση:

i) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση του σώματος συντίθεται από τρεις γραμμικές αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις:

$$y_1 = 5 \cdot \eta\mu(2\pi t) \ (cm)$$

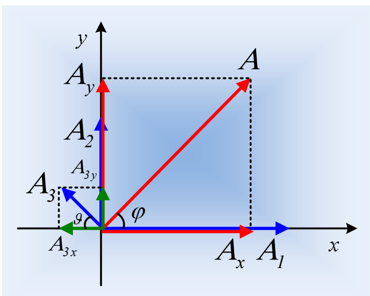
$$y_2 = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 3 \cdot \eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \ (cm)$$

και

$$y_3 = \sqrt{2}\eta\mu\left(2\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \ (cm)$$

Παίρνουμε τρία περιστρεφόμενα διανύσματα το πρώτο με μήκος 5cm, το δεύτερο με μήκος 3cm και το τρίτο με μήκος $\sqrt{2}$ (cm) που στρέφονται με γωνιακή ταχύτητα ω=2π rad/s. Η προβολή τους στον άξονα y, θα μας δίνει κάθε στιγμή τις αντίστοιχες απομακρύνσεις y_1, y_2 και y_3.

Έστω ότι σχεδιάζουμε τα τρία διανύσματα για t=0 (μπλε χρώματος). Θα πάρουμε την παρακάτω εικόνα.



Αν αναλύσουμε το διάνυσμα A_3 σε συνιστώσες (πράσινου χρώματος) πάνω στους άξονες x και y, λαμβάνοντας υπόψη ότι θ=45°, θα πάρουμε:

$$A_{3x}=A_3\cdot συνθ=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ cm}=1\text{cm και}$$

$$A_{3y}= A_3\cdot ημθ=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ cm}=1\text{cm}$$

Έτσι έχουμε:

$$A_x=A_1- A_{3x}=5\text{cm}-1\text{cm}=4\text{cm}$$

$$A_y=A_2+A_{3y}= 3\text{cm}+1\text{cm} = 4\text{cm}$$

Και από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{4^2+4^2}cm=4\sqrt{2}cm$$

Ενώ για τη γωνία που σχηματίζει το πλάτος Α με τον άξονα x θα είναι:

$$εφφ=\frac{A_y}{A_x}=\frac{4}{4}=1\ \rightarrow\ φ=\frac{π}{4}$$

Αλλά καθώς όλα τα παραπάνω διανύσματα στρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και το διάνυσμα Α, ως συνισταμένη των τριών διανυσμάτων, θα στρέφεται επίσης με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω=2π rad/s και η προβολή του κάθε στιγμή θα μας δίνει την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.

Συνεπώς η εξίσωση της κίνησης του σώματος μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη εξίσωση:

$$y=4\sqrt{2}ημ\left(2πt+\frac{π}{4}\right)\ (cm)$$

Από όπου βλέπουμε ότι το πλάτος είναι ίσο με $4\sqrt{2}cm$ ενώ η αρχική φάση της απομάκρυνσης είναι $φ_0=\frac{π}{4}$ rad.

ii) Τη χρονική στιγμή t_1=0,25s, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση:

$$y_1=4\sqrt{2}ημ\left(2πt+\frac{π}{4}\right)=4\sqrt{2}\cdot ημ\left(2π\cdot\frac{1}{4}+\frac{π}{4}\right)=4\sqrt{2}\cdot ημ\left(\frac{3π}{4}\right)=4cm$$

Έχοντας ταχύτητα:

$$υ_1=Aω\cdot συν\left(2πt+\frac{π}{4}\right)=4\sqrt{2}\cdot 2π\cdot συν\left(2πt+\frac{π}{4}\right)\rightarrow$$

$$υ_1=8π\sqrt{2}\cdot συν\left(\frac{3π}{4}\right)=8π\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)cm/s=-8π\cdot 10^{-2}\,m/s$$

Οπότε με βάση τις τιμές αυτές:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι:

$$\frac{dP}{dt} = F = ma = m(-\omega^2 \cdot y)$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dP}{dt} = -0{,}2 \cdot (2\pi)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}\, kg \cdot m/s^2 = -0{,}32 kg \cdot m/s^2 .$$

Η αρνητική τιμή του ρυθμού αυτού, σημαίνει ότι το διάνυσμα $\frac{d\vec{P}}{dt}$ κατευθύνεται προς την αρνητική κατεύθυνση (εδώ προς την θέση ισορροπίας).

β) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_F}{dt} = \frac{|F| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = |F| \cdot |\upsilon_1| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου F=-0,32N (δες προηγούμενη απάντηση), ενώ $\upsilon_1 = -8\pi \cdot 10^{-2}$m/s, οπότε τα δυο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση και α=0°, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = |F| \cdot |\upsilon_1| = 0{,}32 \cdot 8\pi \cdot 10^{-2}\, J/s = 0{,}08 J/s$$

Η θετική τιμή του αντίστοιχου ρυθμού, σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του σώματος αυξάνεται.

dmargaris@gmail.com